シーケントを用いた証明計画法

Planning of Proof by means of Sequents

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract: In a heuristic process of proof in mathematics, we try not only forward derivations from the assumptions such as 'from A, we get B' but also backward derivations from the conclusion such as 'in order to get A, we need B'. As the result, the order of the propositions in accomplished proof is different from the order in which we get those propositions in the heuristic process. For planning of proof, it is important to express *what we want to prove now* and *what we have got so far* at each step in the heuristic process. However, this expression is different from the proof itself by the above reason. In this paper, we suggest a method of planning proof by using 'sequents' for the expression of assumptions and conclusions. For a concrete study, we use the first order NK system of Gentzen to explain our method. Our method gives an algorithm to prove arbitrary tautologies of the first order NK system, and is also valid for practical mathematics which is not necessarily formalized in symbolic logic.

Keywords: Proof, Sequent, NK

1. はじめに

数学の証明を発見するためには，目的とする定理の仮定と結論をつなぐ命題の系列を発見しなければならない．そのために我々は，仮定からの前進的推論のみならず結論からの後退的推論を試みる．すなわち，証明においては「A から B が導かれる」,「A と B から C が導かれる」といった前進的推論のみが用いられるのに対し，証明発見過程においては「A を導くためには B を導けばよい」といった後退的推論が併用される．その結果，完成された証明における命題の導出順序は，それらが発見される順序とは通常大きく異なる．証明発見までの中途段階で大切なことは，その時点における目標（何を示したいか）と前提（何が得られているか）をはっきりさせることであるが，上の理由により，その表現は証明自体とは異なったものとなる．

この論文では，仮定と結論を「シーケント」によって表現することによる証明計画法を提案する．説明に当たっては，議論を具体化するため Gentzen による 1 階述語論理の自然演繹体系 NK を用いる．本方法は，NK に対しては任意のトートロジーを証明するアルゴリズムを与えるが，必ずしも記号論理で定式化されていない実際の数学に対しても，証明計画を支援する手法として用いることができる．

筆者は [5] において，Gentzen のシーケント体系 LK の証明図を NK の証明図に書き換えるひとつの手法を示した．ところが，LK 体系の証明図は下から上に向かって描くことにより機械的に作成することが可能である．そこで，本論文では LK の証明図の上下を逆にしたものを考え，これを証明計画図の基本形とした．さらに，シーケントにおいても矛盾記号 $\perp$ を用いることによって，証明計画をより詳しく表現できるようにするとともに，証明計画図から NK の証明図を作成する手続きの効率化を図った．

都立産業技術高専　ものづくり工学科　一般科目

2. １階述語論理の言語

最初に，本稿で用いる１階述語論理の言語を規定する.

原始記号は以下のものを用いる.

(1) 論理記号: $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$

意味論的には, 順に「ならば」,「かつ」,「または」,「でない」,「任意の」,「存在する」に対応する.

(2) 個体記号： $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$

(3) 関数記号： $f, g, h, \cdots$

ただし，各関数記号には自然数 n が対応しており,「n 変項関数記号」と呼ばれる.

(4) 述語記号： $P, Q, R, \cdots$

ただし，各述語記号には自然数 n が対応しており,「n 変項述語記号」と呼ばれる．特に，0 変項述語記号は命題記号とも呼ばれる.

次に「項」を定義する.

(1) 個体記号は項である。

(2) 任意の n 項関数記号 f，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$，に対し,
$f(t_1, t_2, \cdots t_n)$ も項である.

(3) 以上によって項とされる式のみが項である.

さらに,「論理式」を定義する.

(1) 任意の n 項述語記号 P，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$ に対し,
$P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ は論理式である.

(2) 任意の論理式 A, B に対し、$\neg(A)$，$(A) \vee (B)$，$(A) \wedge (B)$，$(A) \rightarrow (B)$ は論理式である.

(3) 任意の変項 x，任意の論理式 A に対し、$\forall x[A]$，$\exists x[A]$ は論理式である.

(4) 以上によって論理式とされる式のみが論理式である.

例えば，定項 a，変項 x, y，1 項関数記号 f，2 項関数記号 g，1 項述語記号 P，2 項述語記号 Q に対し,

$$\forall x[(P(f(a))) \wedge (\neg(Q(a, f(x))))] \rightarrow (\exists y[(\forall x(P(x)) \vee (Q(f(a), g(y, f(y))))])$$

は論理式であるが，ここで括弧の省略規則を次のように定める.

(1) $P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ の形の部分論理式（素論理式）を囲む括弧は省略してもよい.

(2) $\neg(A)$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい.

(3) $\forall x[A]$ や $\exists x[A]$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい.

以上の規則によれば，先の論理式は次のように書くことができる：

$$\forall x[P(f(a)) \wedge \neg Q(a, f(x))] \rightarrow \exists y[\forall x P(x) \vee Q(f(a), g(y, f(y))]$$

3. 自然演繹体系

本稿では、具体例として１階述語論理の自然演繹体系 NK を用いる．但し体系 NK の厳密な説明は参考文献にゆずり，以下にその推論規則を示す.

論理記号 $\rightarrow$ に関する規則は次の２つである.

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \to B}$$

左の規則は A と $A \to B$ から B を結論することを表しており，前提における $\to$ 記号が結論にないことから（$\to$ 除去）の規則と呼ばれる．右の規則は，仮定 A の下で B が導かれることから $A \to B$ を結論することを表しており、($\to$ 導入）の規則と呼ばれる. ($\to$ 導入）の規則を用いる際は，具体的には仮定 A（1箇所とは限らない）に番号をふり，同じ番号を結論 B の右側に書く．

論理記号 $\land$ に関する規則は次の 3 つである．

$$\frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B} \qquad \frac{A \qquad B}{A \land B}$$

左の 2 つは（$\land$ 除去）の規則、右は（$\land$ 導入）の規則と呼ばれる．

論理記号 $\lor$ に関する規則は次の 3 つである．

$$\frac{A \lor B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ C\end{array}}{C} \qquad \frac{A}{A \lor B} \qquad \frac{B}{A \lor B}$$

左の規則は，$A \lor B$ と仮定 A の下で C が導かれることと，仮定 B の下で C が導かれることから C を結論することを表しており, ($\lor$ 除去）の規則と呼ばれる．具体的な使用法は（$\to$ 導入）の場合と同様である．右の 2 つは（$\lor$ 導入）の規則と呼ばれる．

論理記号 $\neg$ に関する規則は次の 3 つである．

$$\frac{A \qquad \neg A}{\bot} \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \bot\end{array}}{\neg A} \qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

ここで，記号 $\bot$ は矛盾命題を表す特殊な命題記号である．最初の規則は A と $\neg A$ から矛盾が導かれることを表しており, ($\neg$ 除去）の規則と呼ばれる．次の規則は仮定 A の下で矛盾が導かれることから $\neg A$ を結論することを表しており, ($\neg$ 導入）の規則と呼ばれる．最後の規則は（$\neg\neg$ 除去）の規則と呼ばれる．自然演繹法における命題論理の推論規則は以上であるが，ここで例示を兼ねて次の派生規則を導いておく．

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ B\end{array}}{A \lor B}$$

これは $\neg$ と $\lor$ に関する派生規則であり，次のようにして導くことができる．

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}(1)\\ \neg A\\ \cdots\cdots\\ B\end{array}}{A \lor B} \qquad \begin{array}{c}(2)\\ \neg(A \lor B)\end{array}}{\bot \quad (1)}}{\neg\neg A}}{A \lor B} \qquad \begin{array}{c}(2)\\ \neg(A \lor B)\end{array}}{\bot \quad (2)}}{\quad}$$

$$\frac{\neg\neg(A \lor B)}{A \lor B}$$

述語論理においては，さらに以下の規則が加わる．

論理記号 $\forall$ に関する規則は次の 2 つである．

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t)} \qquad\qquad \frac{P(a)}{\forall x P(x)}$$

左の規則は（$\forall$ 除去）の規則と呼ばれる．ここの t は任意の項を表す．右の規則は（$\forall$ 導入）の規則と呼ばれる．ここの a は、$P(a)$ に到る全ての仮定の中に含まれない変項を表し，$P(x)$ は式 $P(a)$ のに現れる全ての a を x で置き換えた式を表す．

論理記号 $\exists$ に関する規則は次の 2 つである．

$$\frac{\exists x P(x) \qquad \begin{matrix}[P(a)] \\ C\end{matrix}}{C} \qquad\qquad \frac{P(t)}{\exists x P(x)}$$

左の規則は（$\exists$ 除去）の規則と呼ばれる．ここの a は、上段の C に到る仮定のうち $P(a)$ 以外のものと C 自身に含まれない変項を表し，$P(x)$ は、式 $P(a)$ のに現れる全ての a を x で置き換えた式を表す．右の規則は（$\exists$ 導入）の規則と呼ばれる．ここの t は任意の項を表す．

以上が NK の全ての推論規則である．

4. 証明図の作成方針

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ と $B_1, B_2, \cdots, B_m, C$ が論理式の列であるとき，

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m, C$$

という形の図式をシーケントといい，意味論的には通常「（A_1 かつ A_2 かつ $\cdots$ かつ A_n）ならば（B_1 または B_2 または $\cdots$ または B_m または C)」を表すが，本稿では「（A_1 かつ A_2 かつ $\cdots$ かつ A_n かつ $\neg B_1$ かつ $\neg B_2$ かつ $\cdots$ かつ $\neg B_m$）ならば C」と解釈する．さらに，$A_1, A_2, \cdots A_n, \neg B_1, \neg B_2, \cdots \neg B_m$ を仮定とし C を結論とする証明図を，シーケント $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m, C$ の証明図と呼ぶことにする（証明図における各仮定の出現回数は、0 個を含めいくつでもよい）．以下，このシーケントを用いて証明図の作成方針を定式化していく．

方針の説明に当たり，次の記法を用いる．まず，シーケント $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m, C$ の証明図を次のように表現する．

$$\begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n \quad \neg B_1 \quad \neg B_2 \quad \cdots \quad \neg B_m \\ \vdots \\ C \end{array}$$

さらに，列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を Γ、列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ を Δ とおいてできるシーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を次のように表現する．

$$\begin{array}{c} \Gamma \qquad \neg\Delta \\ \vdots \\ C \end{array}$$

方針（右 $\to$）　$\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B$ の証明図を得るため，$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図をつくる．

この方針を，次の図式で表現する．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{c} \overset{(1)}{A} \qquad \Gamma \qquad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{B}{A \to B}\,(1) \end{array}$$

方針（左 $\to$）　$\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, C, A$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図をつくる．

この方針は，次の図式で表現される．

$$\dfrac{\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, C, A \qquad \Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C}$$

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, C, A$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図から $\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \qquad \dfrac{A \to B \qquad \begin{array}{c} \Gamma \quad \Pi \quad \neg\Delta \quad \overset{(1)}{\neg C} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A \end{array}}{B} \qquad \Pi \qquad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C \end{array} \qquad \overset{(1)}{\neg C}}{\bot}\,(1)}{\neg\neg C}}{C}$$

方針（右 $\wedge$）　$\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ の証明図と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図をつくる．

この方針は，次の図式で表現される．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ の証明図と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \quad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \quad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

方針（左 $\wedge$）　$\Gamma, A \wedge B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図をつくる．

この方針は，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma, A \wedge B, \Pi \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C}$$

$\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図から $\Gamma, A \wedge B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{c} \Gamma \qquad \dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B} \qquad \Pi \qquad \neg\Delta \\ \vdots \\ C \end{array}$$

方針（右 $\vee$）　$\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B$ の証明図をつくる．

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B$ の証明図を得るには，前章で示した派生規則により，次のようにする．

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \qquad \Delta \qquad \overset{(1)}{\neg A} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B}\ (1)$$

方針（左 $\vee$）　$\Gamma, A \vee B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma, A, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta.C$ の証明図をつくる．

この方針は，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma, A \vee B, \Pi \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma, A, \Pi \Rightarrow \Delta, C \qquad \Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta.C}$$

$\Gamma, A, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta.C$ の証明図から $\Gamma, A \vee B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \Gamma \quad \overset{(1)}{A} \quad \Pi \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \quad \overset{(1)}{B} \quad \Pi \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ (1)$$

方針（入 $\bot$）　$\Gamma \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, C, \bot$ の証明図をつくる．

これは，次に述べる方針 (除 $\bot$) あるいは方針（左 $\neg$）につなげるために用いる方針であり，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C, \bot}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, C, \bot$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{c}
\Gamma \qquad \neg\Delta \qquad \overset{(1)}{\neg C} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\neg C}\,(1)}{C}
\end{array}$$

方針 (除 $\bot$)　$\Gamma \Rightarrow \Delta, D, \Sigma, \bot$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma, D$ の証明図をつくる．
この方針は，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D, \Sigma, \bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma, D}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma, D$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, D, \Sigma, \bot$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{c}
\Gamma \qquad \neg\Delta \qquad \neg\Sigma \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{D \qquad\qquad \neg D}{\bot}
\end{array}$$

方針（右 $\neg$）　$\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C$ の証明図を得るため，$C, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$ の証明図をつくる．
この方針は，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C}{C, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}$$

$C, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{c}
\overset{(1)}{C} \qquad \Gamma \qquad \neg\Delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\bot}{\neg C}\,(1)
\end{array}$$

方針（左 $\neg$）　$\Gamma, \neg D, \Pi \Rightarrow \Delta, \bot$ の証明図を得るため，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, D$ の証明図をつくる．
この方針は，次の図式で表現される．

$$\frac{\Gamma, \neg D, \Pi \Rightarrow \Delta, \bot}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, D}$$

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, D$ の証明図から $\Gamma, \neg D, \Pi \Rightarrow \Delta, \bot$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$
\begin{array}{c}
\Gamma \qquad \Pi \qquad \neg\Delta \\
\vdots \\
\dfrac{D \qquad\qquad \neg D}{\bot}
\end{array}
$$

方針（右 $\forall$） $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x)$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a)$ の証明図をつくる．ただし，a は $\Gamma, \Delta, P(x)$ に現れない変項であり，$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を a で置き換えてできる式とする．

この方針は，次の図式で表現される．

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a)}
$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a)$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x)$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$
\begin{array}{c}
\Gamma \qquad \neg\Delta \\
\vdots \\
\dfrac{P(a)}{\forall x P(x)}
\end{array}
$$

方針（左 $\forall$） $\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma, \forall x P(x), P(t), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図をつくる．ただし，t は任意の項であり，$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる式とする．

この方針は，次の図式で表現される．

$$
\dfrac{\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma, \forall x P(x), P(t), \Pi \Rightarrow \Delta, C}
$$

ここで，上式における $\forall x P(x)$ が下式にも残っていることに注意したい．$\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るためには $\Gamma, P(t), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図が得られれば十分ではあるが，それは必ず存在するという保証はない．そこで，下式にも $\forall x P(x)$ を残すことによって上式と下式を意味論的に同値にし，$\forall x P(x)$ に関して再度本方針を適用する余地を残しておくのである．$\Gamma, \forall x P(x), P(t), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図から $\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$
\begin{array}{c}
\Gamma \qquad \forall x P(x) \qquad \dfrac{\forall x P(x)}{P(t)} \qquad \Pi \qquad \neg\Delta \\
\vdots \\
C
\end{array}
$$

方針（右 $\exists$） $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x)$ の証明図を得るため，$\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t)$ の証明図をつくる．ただし，t は任意の項であり，$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる式とする．

この方針は，次の図式で表現される．

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t)}
$$

ここで，上式における $\exists x P(x)$ が下式にも残っているが，この理由は方針（左 $\forall$）の場合と同様である．$\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t)$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x)$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\begin{array}{ccc} & & (1) \\ \Gamma & \neg\Delta & \neg\exists x P(x) \\ \hdashline \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(t)}{\exists x P(x)} \qquad \overset{(1)}{\neg\exists x P(x)}}{\bot}\;(1)}{\neg\neg\exists x P(x)}}{\exists x P(x)}$$

方針（左 ∃） $\Gamma, \exists x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るため，$\Gamma, P(a), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図をつくる．ただし，a は $\Gamma, P(x), \Pi, \Delta, C$ に現れない変項であり，$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を a で置き換えてできる式とする．

この方針は，次の図式で表現される．

$$\dfrac{\Gamma, \exists x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma, P(a), \Pi \Rightarrow \Delta, C}$$

$\Gamma, P(a), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図から $\Gamma, \exists x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには，次のようにする．

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \begin{array}{cccc} & (1) & & \\ \Gamma & P(a) & \Pi & \neg\Delta \\ \hdashline & & C & \end{array}}{C}\;(1)$$

5．証明計画図の作成

前節で説明した 14 種の方針を組み合わせることにより,「証明計画図」を作成することができる．

命題論理における例として，$A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow C \to (B \to A)$ の証明計画図を作成してみよう．まず，$A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow C \to (B \to A)$ の証明図を得るためには方針（右 →）により $C, A \wedge \neg(B \vee C) \Rightarrow B \to A$ の証明図を得ればよい．このことを次の図で表現する．

$$\dfrac{A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow C \to (B \to A)}{C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow B \to A}$$

次に，$C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow B \to A$ の証明図を得るためには再び方針（右 →）により $B, C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow A$ の証明図を得ればよいので，これを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$\dfrac{\dfrac{A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow C \to (B \to A)}{C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow B \to A}}{B, C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow A}$$

さらに，$B, C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow A$ の証明図を得るためには方針（左 ∨）により $B, C, A \Rightarrow A$ の証明図と $B, C, \neg(B \wedge C) \Rightarrow A$ の証明図を得ればよいので，これらを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow C \to (B \to A)}{C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow B \to A}}{B, C, A \vee \neg(B \wedge C) \Rightarrow A}}{B, C, A \Rightarrow A \qquad B, C, \neg(B \wedge C) \Rightarrow A}$$

ここで，$B, C, A \Rightarrow A$ の証明図は A のみからなる証明図として得られる．$B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A$ については，結論式がこれ以上分解できないため，方針（入 ⊥）により $B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A, \perp$，さらに方針（左 ¬）により $B, C \Rightarrow A, B \land C$ につなげる．これらを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$
\begin{array}{c}
A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow C \to (B \to A) \\ \hline
C, A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow B \to A \\ \hline
B, C, A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow A \\ \hline
\begin{array}[t]{cc}
B, C, A \Rightarrow A \qquad &
\begin{array}[t]{c}
B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A \\ \hline
B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A, \perp \\ \hline
B, C \Rightarrow A, B \land C
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

さらに，$B, C \Rightarrow A, B \land C$ の証明図を得るためには方針（右 ¬）により $B, C \Rightarrow A, B$ の証明図と $B, C \Rightarrow A, C$ の証明図を得ればよいので，これらを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$
\begin{array}{c}
A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow C \to (B \to A) \\ \hline
C, A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow B \to A \\ \hline
B, C, A \lor \neg(B \land C) \Rightarrow A \\ \hline
\begin{array}[t]{cc}
B, C, A \Rightarrow A \qquad &
\begin{array}[t]{c}
B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A \\ \hline
B, C, \neg(B \land C) \Rightarrow A, \perp \\ \hline
B, C \Rightarrow A, B \land C \\ \hline
B, C \Rightarrow A, B \qquad B, C \Rightarrow A, C
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

ここで，$B, C \Rightarrow A, B$ の証明図は B のみからなる証明図として得られ，$B, C \Rightarrow A, C$ の証明図は C のみからなる証明図として得られるので，これで証明計画図が完成した．これを下から上に辿っていき，各方針を実行することにより次の証明図が得られる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \lor \neg(B \land C) \qquad \overset{(1)}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{B} \quad \overset{(3)}{C}}{B \land C} \qquad \overset{(1)}{\neg(B \land C)}}{\perp}}{\neg\neg A}}{A}}{A}\,(1)}{B \to A}\,(2)}{C \to (B \to A)}\,(3)
$$

述語論理における例として，$\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ の証明図を計画してみよう．まず，$\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ の証明図を得るためには方針（左 ∃）により $P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ の証明図を得ればよい．このことを次の図で表現する．

$$
\begin{array}{c}
\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\ \hline
P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)
\end{array}
$$

次に，$P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ の証明図を得るためには方針（右 →）により $P(a) \to Q(a), \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$ の証明図を得ればよいので，これを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$
\begin{array}{c}
\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\ \hline
P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\ \hline
P(a) \to Q(a), \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)
\end{array}
$$

さらに，$P(a) \to Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$ の証明図を得るためには，方針（左 $\to$）により $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a)$ の証明図と $Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$ の証明図を得ればよいので，これらを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)}{P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)}}{P(a) \to Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)}}{\forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a) \qquad\qquad Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)}$$

$\forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a)$ の証明図を得るためには，方針（左 $\forall$）により $\forall xP(x), P(a) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a)$ の証明図を得ればよく，$Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$ の証明図を得るためには，方針（右 $\exists$）により $Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), Q(a)$ の証明図を得ればよいので，これらを上の図に書き足して次の図をつくる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)}{P(a) \to Q(a) \Rightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)}}{P(a) \to Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)}}{\dfrac{\forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a)}{\forall xP(x), P(a) \Rightarrow \exists xQ(x), P(a)} \qquad\qquad \dfrac{Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)}{Q(a), \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x), Q(a)}}$$

ここで，$B, C \Rightarrow A, B$ の証明図は B のみからなる証明図として得られ，$B, C \Rightarrow A, C$ の証明図は C のみからなる証明図として得られるので，これで計画は完成した．この証明計画図を下から上に辿っていき，各方針を実行することにより次の証明図が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\exists x[P(x) \to Q(x)] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\forall xP(x)}}{P(a)} \qquad \overset{(1)}{P(a) \to Q(a)}}{Q(a)}}{\exists xQ(x)}\;(1)}{\exists xQ(x)}\;(2)}{\forall xP(x) \to \exists xQ(x)}$$

シーケントによる証明計画図を用いて与えられた恒真なシーケントの証明図を作成する手順は，次のようにまとめることができる．

[1] 与えられたシーケントを前述の 14 種の方針に従って順次分解，変形し，上から下に向かって証明計画図をつくっていく．

[2] 証明計画図の末端の全てのシーケントが，最終形すなわち，$\Gamma, C, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の形になるまで変形，分解を続ける．

[3] 完成した証明計画図の末端のシーケントの証明図（ひとつの式のみからなる証明図）から始め，証明計画図を下から上に向かって辿りながら，方針にしたがって順次証明図を作成していく．

6. おわりに

証明問題を解こうとするとき，本稿に示した証明計画図に当たるものは，いわば思考者の頭の中に非形式的に描かれると考えられる．従って，それが通常の数学の講義において紹介されることはない．しかし，学生が新しい証明問題に取り組む際に手本となるのは，過去の証明そのものよりもそれらの発見のための探索過程である．従って，学生の問題解決能力の育成という観点からは，定理や証明そのものの解説だけでなく「その証明を発見するためにはどのように考えたらよいか」といった話が講義に盛り込まれることが望ましい．本稿で提案した方法は，証明計画を支援する手法として有用であると同時に，教師が学生に証明の探索過程を説明するための手法としても有用であると思われる．

7. 参考文献

[1]　松本和夫：数理論理学，共立，1970

[2]　N.W. テニント：自然演繹の論理学，八千代，1981

[3]　竹内　外史，八杉　満利子：証明論入門，共立，1988

[4]　日本数学会：岩波数学辞典，第 4 版，岩波，2007

[5]　LK から NK への証明の書き換えについて，都立産業技術高専研究紀要，第 3 号，2009