

デジタル制御アルゴリズムの実装に関する研究

— デルタ形式と多項式形式の比較 —

A study on the implementation of digital control algorithms

— A comparison of the delta versus polynomial form —

青 木 立

Tatsu Aoki

Abstract: This paper considers finite word length (FWL) effects when implementing the discrete-time transfer functions in the delta form. A new numerical integration method for fixed-point microprocessors named Variable Modulation Method (VMM) was previously proposed. In this series of research, the effectiveness of VMM was verified on a digital filter and a controller via simulations and experiments. A general procedure for applying VMM to a digital controller by using Matlab/Simulink is also reported. Furthermore, a simple methodology that is mathematically equivalent to VMM was proposed. Since this modified VMM(MVMM) offers good finite word-length performance, and becomes the same form based on the conventional delta operator, MVMM will be useful in the industrial applications. Concerning the delta form, the polynomial form that generalizes the delta form is proposed and the optimization of the polynomial form is also reported. In these papers, the optimum implementation method is proposed, when a control algorithm with the transfer function or the state-space description is given. On the other hand, MVMM improves the operational accuracy, when a control algorithm is given as a delta form in fixed-point arithmetic. This paper presents the effectiveness of MVMM, comparing the polynomial form to MVMM on a fourth-order low-pass Butterworth digital filter.

Keywords: Delta operator, Implementation, Digital signal processing, Microprocessor control, Pulse width modulation

1. はじめに

産業界ではデジタル制御システムの省エネルギー化、省スペース化、低コスト化などから8ビットや16ビットなど基本語長が短い固定小数点マイクロプロセッサが多用されている。高速サンプリングデジタル制御系では、制御アルゴリズムが数値的に不安定になり、コントローラの特徴が設計時と大幅に異なる[1]-[8]。この不安定性は語長をより長く設定することにより低減できるが、倍精度演算を多用することは演算時間の面から困難であり、デルタオペレータ δ を用いた手法が有効である[1]-[8]。しかし、固定小数点演算の狭いダイナミックレンジでは、デルタオペレーションの有効性が失われる[9]。そこで、固定小数点演算においてもデルタオペレーションが有効になる手法、変数変調法(VMM)が提案され、その有効性がシミュレーションや実験により確認されている[9]-[19]。さらに、変数変調法(VMM)と等価な効果が得られるより簡便な手法、修正変数変調法(Modified VMM, MVMM)を提案した[20]。このMVMMでは、VMMで必要であった入力と出力に関するサンプリング周期ごとの符号変調やコントローラ出力部のハイパスフィルタが不要になる。このため、演算式が通

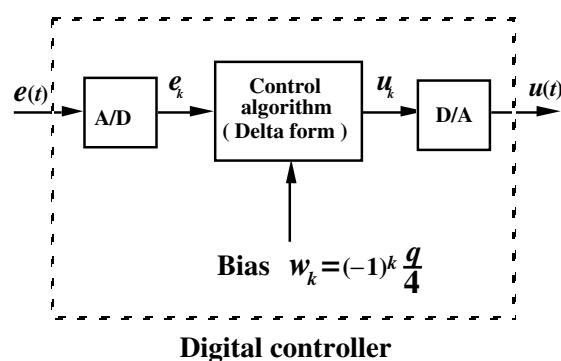


Fig. 1 Digital controller based on MVMM

常のデルタ形式とほぼ同一になり、バイアス項を加えるだけで本手法の有効性が容易に確認できる。4次のバタワースデジタルフィルタを例にMVMMの有効性が検証された[20]。

本論文では、デルタオペレータを一般化した多項式オペレータ(The polynomial operator, ρ_i)に基づいた手法とMVMMについてその演算精度を比較し、多項式オペレータの有効性を検証する。

2. 制御アルゴリズムの実装形式

2.1 デルタオペレータに基づいた形式

p 次系の伝達関数 $H(z)$ を以下に示す．

$$H(z) = \frac{b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \dots + b_p}{z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p} \quad (1)$$

サンプリング周期 T を用いない正規化デルタオペレータ

$$\bar{\delta} = z - 1 \quad (2)$$

により式(1)をデルタ形式に変換する．

$$H(\bar{\delta}) = \frac{b_0 \bar{\delta}^p + b'_1 \bar{\delta}^{p-1} + \dots + b''_p}{z^p + a'_1 \bar{\delta}^{p-1} + \dots + a''_p} \quad (3)$$

式(3)より制御アルゴリズムは

$$\begin{aligned} x_k^0 &= e_k - a'_1 x_k^1 - \dots - a'_{p-1} x_k^{p-1} - a''_p x_k^p \\ u_k &= b'_0 x_k^0 + b'_1 x_k^1 + \dots + b'_{p-1} x_k^{p-1} + b''_p x_k^p \\ x_{k+1}^p &= x_k^p + \bar{m}(T_p x_k^{p-1}) \\ &\vdots \\ x_{k+1}^1 &= x_k^1 + \bar{m}(T_1 x_k^0) \end{aligned} \quad (4)$$

となる．ここで，

$$a'_i = \frac{a''_i}{T_1 \cdot T_i}, \quad b'_i = \frac{b''_i}{T_1 \cdot T_i}$$

とする． T_i は設計パラメータで，逆デルタオペレータ演算，すなわち，積分演算がオーバーフローしないように設定する．また， n ビットの符号付き固定小数点演算において， $q = 2^{n-1}$ ，任意の値 y を整数化する関数を $int(y)$ とすると式(4)に示す $\bar{m}(y)$ は次式により与えられる．

$$\bar{m}(y) = int \left[\frac{y + \frac{q}{2} + w}{q} \right] \quad (5)$$

演算結果は $q/2$ の項により四捨五入される．バイアス w はサンプリング周期 T 毎に符号変調される．

$$w = (-1)^k \frac{q}{4} \quad (6)$$

表1に示すように0及び1の信号がバイアス w によりサンプリング周期毎に交互に発生する．その結果，表2に示すように積分値 x_k^i が精度良く演算可能になる．同様にして，

$$w = (-1)^k \frac{q}{4} + (-1)^{int(\frac{k}{2})} \frac{q}{8} \quad (7)$$

のようにバイアスを2個導入した場合を表3及び表4に示す．バイアスが1個の場合より精度良く演算可能になることがわかる．同様にしてバイアスを4個，8個と導入することによりさらに演算精度が向上する．しかし，バイアスの数を増やすとそれだけPWMの1周期が長くなり，高速な信号に追従できなくなる．従って，バイアスの個数とPWMの1周期の時間についてトレードオフが必要である．図2及び図3に p 次系MVMMのブロック線図，逆デルタオペレーションのブロック線図をそれぞれ示す．

Table 1 Principle of MVMM(one bias)

k	w	$\bar{m}(T_i x_k^{i-1})$				
		$T_i x_k^{i-1}$				
		$-\frac{3}{4}q$	$-\frac{1}{4}q$	0	$\frac{1}{4}q$	$\frac{3}{4}q$
0	w	-1	0	0	1	1
1	$-w$	-1	-1	0	0	1
2	w	-1	0	0	1	1
3	$-w$	-1	-1	0	0	1
4	w	-1	0	0	1	1
5	$-w$	-1	-1	0	0	1
6	w	-1	0	0	1	1
7	$-w$	-1	-1	0	0	1

Table 2 Integral value(one bias)

k	w	x_k^i				
		$T_i x_k^{i-1}$				
		$-\frac{3}{4}q$	$-\frac{1}{4}q$	0	$\frac{1}{4}q$	$\frac{3}{4}q$
0	w	0	0	0	0	0
1	$-w$	-1	0	0	1	1
2	w	-2	-1	0	1	2
3	$-w$	-3	-1	0	2	3
4	w	-4	-2	0	2	4
5	$-w$	-5	-2	0	3	5
6	w	-6	-3	0	3	6
7	$-w$	-7	-3	0	4	7
8	w	-8	-4	0	4	8

Table 3 Principle of MVMM(two biases)

k	w	$\bar{m}(T_i x_k^{i-1})$								
		$T_i x_k^{i-1}$								
		$-\frac{7}{8}q$	$-\frac{5}{8}q$	$-\frac{3}{8}q$	$-\frac{1}{8}q$	0	$\frac{1}{8}q$	$\frac{3}{8}q$	$\frac{5}{8}q$	$\frac{7}{8}q$
0	w_1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	$-w_1$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1
2	w_2	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1
3	$-w_2$	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1
4	w_1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1
5	$-w_1$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1
6	w_2	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1
7	$-w_2$	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1

Table 4 Integral value(two biases)

k	w	x_k^j								
		$T_j x_k^{j-1}$								
		$-\frac{7}{8}q$	$-\frac{5}{8}q$	$-\frac{3}{8}q$	$-\frac{1}{8}q$	0	$\frac{1}{8}q$	$\frac{3}{8}q$	$\frac{5}{8}q$	$\frac{7}{8}q$
0	w_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$-w_1$	-1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	w_2	-2	-1	-1	-1	0	1	1	1	2
3	$-w_2$	-3	-2	-1	1	0	1	2	2	3
4	w_1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
5	$-w_1$	-5	-3	-2	1	0	2	3	4	5
6	w_2	-6	-4	-3	-2	0	2	3	4	6
7	$-w_2$	-7	-5	-3	2	0	2	4	5	7
8	w_1	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

2.2 多項式オペレータに基づいた形式

多項式オペレータは、以下により定義される[21][22].

$$\rho_i = \frac{z - \gamma_i}{\Delta_i} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

ここで、 $\Delta_i > 0$ 、 γ_i は $-1, 0, +1$ のいずれかである。通常のデルタオペレータは $\gamma_i = 1$ 、 $\Delta_i = T$ に、正規化デルタオペレータは $\gamma_i = 1$ 、 $\Delta_i = 1$ に設定することにより表現できる。すなわち、デルタオペレータを一般化したものが多項式オペレータである。伝達関数 $H(z)$ は、多項式オペレータ $\{\rho_i\}$ を用いて、 $\{\alpha_i, \beta_i\}$ のように多項式形式に変換される。

$$H(\rho_i) = \frac{\beta_0 \prod_{i=1}^p \rho_i + \beta_1 \prod_{i=2}^p \rho_i + \dots + \beta_p}{\prod_{i=1}^p \rho_i + \alpha_1 \prod_{i=2}^p \rho_i + \dots + \alpha_p} \quad (9)$$

図4に多項式形式で記述した p 次系のブロック線図を示す。また、図5に逆多項式オペレーションのブロック線図を示す。図3に示す逆デルタオペレーションと異なり、逆多項式オペレーションではファクタ Δ_i が積分演算の後に乗じられている。また、固定小数点演算における l_2 スケーリング時に必要となる多項式オペレータに基づいた p 次の状態方程式を以下に示す[21][22]。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_p x_k + B_p u_k \\ y_k &= C_p x_k + \beta_0 u_k \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_p = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta_1 \alpha_1 & \Delta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\Delta_1 \alpha_2 & 0 & \Delta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\Delta_1 \alpha_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta_p \\ -\Delta_1 \alpha_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_p = \bar{\beta} - \beta_0 \bar{\alpha}$$

$$C_p = (\Delta_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\triangleq (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_p)^T \\ \bar{\beta} &\triangleq (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_p)^T \end{aligned}$$

とする。

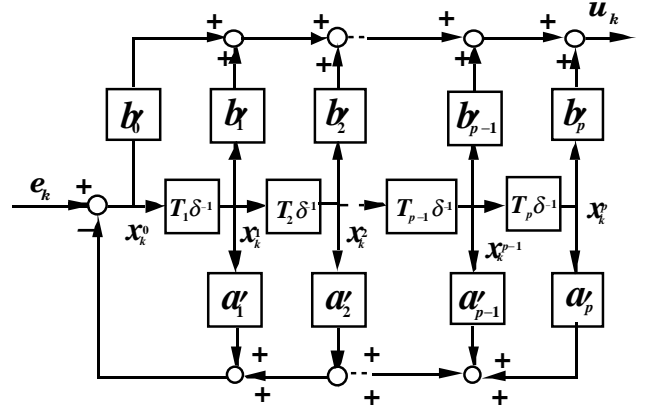


Fig. 2 p th-order delta form

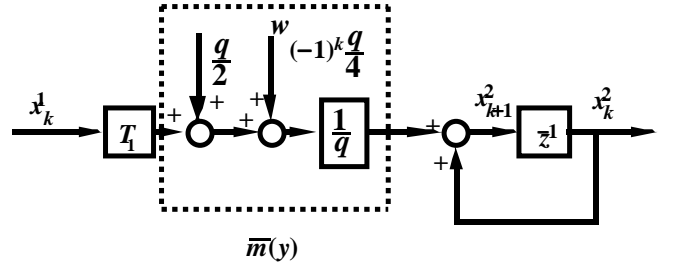


Fig. 3 Inverse delta operation based on MVMM

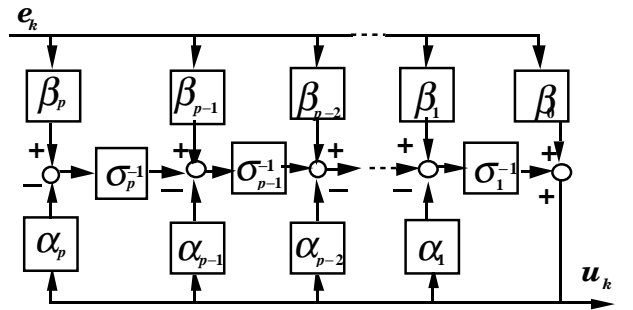


Fig. 4 Polynomial operator based form

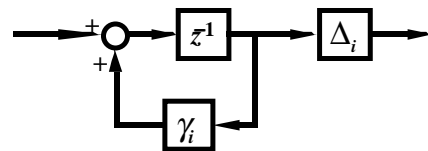


Fig. 5 Inverse Polynomial operation ρ_i^{-1}

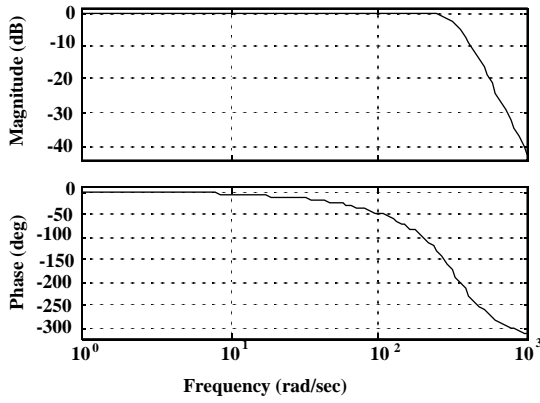


Fig. 6 Bode plot of a 4th-order digital filter

3. デルタ形式と多項式形式の比較

3.1 デジタルフィルタ

4次のパワースディジタルフィルタを例に検証する.

$$H(z) = \frac{b_0z^4 + b_1z^3 + b_2z^2 + b_3z + b_4}{z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4} \quad (11)$$

ここではカットオフ周波数を50Hz, サンプル周期 T を1msに設定した. フィルタ係数は

$$\{a_i\} = \{1.0000, -3.1806, 3.8612, -2.1122, 0.4383\}$$

$$\{b_i\} = \{0.0004, 0.0017, 0.0025, 0.0017, 0.0004\}$$

となり, 図6にフィルタのボード線図を示す.

3.2 デルタ形式におけるフィルタ係数

l_2 スケーリングによるフィルタ係数は以下になる.

$$\{a'_i\} = \{1.2568, 1.0247, 0.6893, 0.3268\}$$

$$\{b'_i\} = \{4.1660 \times 10^{-4}, 0.0051, 0.0321, 0.1345, 0.3268\}$$

$$\{T_i\} = \{0.6519, 0.4779, 0.3181, 0.2058\}$$

3.3 多項式形式におけるフィルタ係数

2次系以上では, ラウンドオフノイズが最小になるように γ_i 及び Δ_i の各値を選択する. 式(11)に示すフィルタの場合, $\gamma_i = 1$ のとき, すなわち, 多項式オペレータが正規化デルタオペレータのときにラウンドオフノイズが最小になる[22]. また, l_2 スケーリングによるフィルタ係数は, 対角化された $\bar{A}_\rho, \bar{B}_\rho, \bar{C}_\rho$ に関する可制御性グラミアン \bar{W}_c

$$\bar{W}_c = \sum_{j=0}^{+\infty} \bar{A}_\rho^j \bar{B}_\rho \bar{B}_\rho^T (\bar{A}_\rho^T)^j \quad (12)$$

を用いて式(13)により求まる[22].

$$\Delta_1 = \sqrt{\bar{W}_c(1,1)}$$

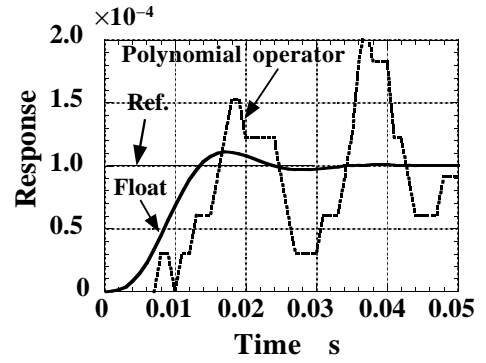
$$\Delta_i = \sqrt{\frac{\bar{W}_c(i,i)}{\bar{W}_c(i-1,i-1)}} \quad i = 2, \dots, p \quad (13)$$

$$\{\alpha_i\} = \{2.5603, 1.2112, 0.6960, 0.3722\}$$

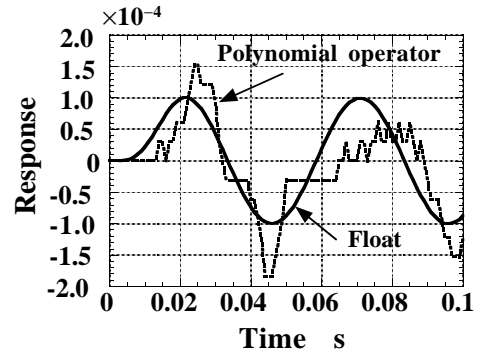
$$\{\beta_i\} = \{4.1660 \times 10^{-4}, 0.0104, 0.0379, 0.1358, 0.3722\}$$

$$\{\gamma_i\} = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$\{\Delta_i\} = \{0.3200, 0.8237, 0.3723, 0.1824\}$$

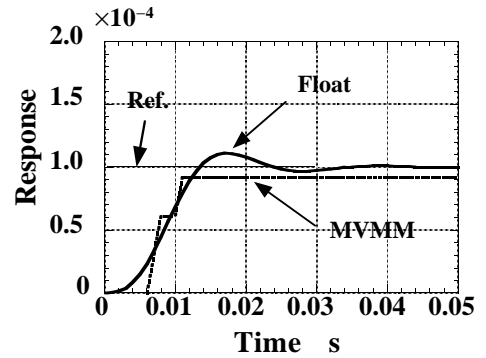


(a) Step response

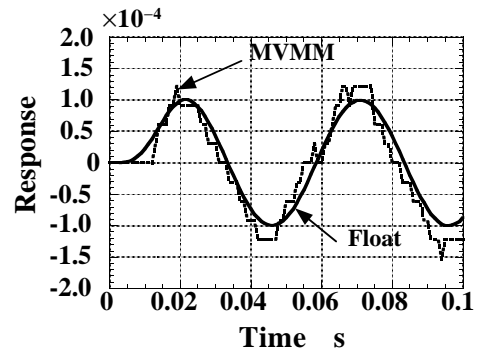


(b) Sinusoidal response(20 Hz)

Fig. 7 The polynomial operator based form

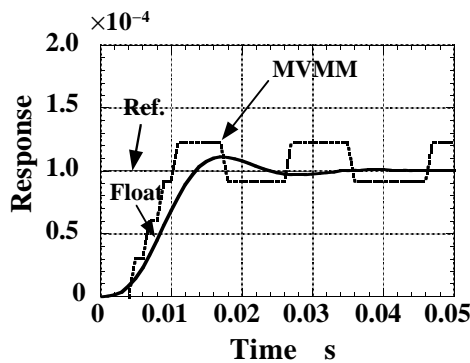


(a) Step response

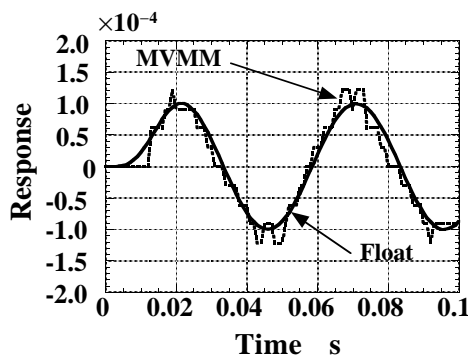


(b) Sinusoidal response(20 Hz)

Fig. 8 MVMM based form without biases



(a) Step response



(b) Sinusoidal response(20 Hz)

Fig. 9 MVMM based form with biases

3.4 シミュレーション結果

Matlab/Simulinkを用い、サンプリング周期 T を1ms、語長を16ビット、固定小数点演算のスケールを $1.0 \triangleq 2^{15}$ に設定した。図7に多項式オペレータに基づいた形式のステップ応答及び正弦波応答を示す。浮動小数点演算と固定小数点演算における応答が大幅に異なる。図8にMVMMにおいて式(5)に示すバイアス w を加えない場合の応答を示す。多項式形式に比べて固定小数点演算における応答が浮動小数点演算のそれに近い。図9にMVMMにおいて式(7)に示すバイアス w を加えた場合の応答を示す。ステップ応答では量子化の単位である $1/2^{15}$ のリミットサイクルが発生している。しかし、図8の場合と比べて浮動小数点演算の応答により近い応答が得られる。従って、逆デルタオペレーションにバイアス w を加えたMVMM形式の方が多項式形式よりアルゴリズムを精度良く演算できることがわかった。これは、多項式形式では演算途中に発生するオーバーフローやアンダフローによる演算誤差を十分に考慮していないためである。

4. 結論

正規化デルタオペレータに基づいたMVMM形式と多項式オペレータに基づいた形式について、4次のパワースフィルタに関して演算精度を比較した。その結果、MVMM形式の方が演算精度が高いことがわかった。

5. 参考文献

- [1] R. C. Agarwal and C. S. Burrus: New recursive digital filter having very low sensitivity and round-off noise, IEEE Trans. CAS, **22**, 12, (1971) 921.
- [2] R. M. Goodall: High-speed digital controllers using an 8bit microprocessor, Software & Microsystems, **4**, 5/6, (1985) 246.
- [3] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, IEEE Trans. on Automatic Control, **31**, 11, (1986) 1015.
- [4] R. M. Goodall, "Minimisation of computation for digital controllers, Trans. Inst MC, **11**, 5, (1989) 218.
- [5] R. M. Goodall: The delay operator z^{-1} - inappropriate for use in recursive digital filters?, Trans. Inst MC, **12**, 5, (1990) 246.
- [6] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: Digital Estimation and Control -A Unified Approach-, New Jersey:Prentice-Hall, (1990)
- [7] G. C. Goodwin and R. H. Middleton and H. V. Poor: High-Speed Digital Signal Processing and Control, Proc. The IEEE, **80**, 2, (1992) 240.
- [8] 金井喜美雄, 堀 憲之: デジタル制御システム入門—デルタオペレータの適用—, 槇書店, (1992)
- [9] T. Aoki: Implementation of Modified Delta Form for Microprocessors using Fixed-Point Arithmetic, Proc. of American Control Conference, (1999) 4056.
- [10] 青木 立: 固定小数点マイクロプロセッサに適した制御アルゴリズムの実装方法(第1報)—変数変調デルタオペレーションのPID制御系への適用と実機による検証—, 精密工学会誌, **71**, 3, (2005) 394.
- [11] 青木 立: 修正デルタ形式に基づいたオブザーバの実機による検証—固定小数点マイクロプロセッサに適したデルタ形式—, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, **1**, (2007) 15.
- [12] T. Aoki: Implementation of Fixed-Point Control Algorithms Based on the Modified Delta Operator and Form for Intelligent Systems, J. of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, **11**, 6, (2007) 709.
- [13] T. Aoki: A Reduction of Round-off Noise Based on the Modified Delta Form for Fixed-Point Arithmetic, Proc. 19th Int. Conf. on Noise and Fluctuation, (2007) 724.
- [14] 青木 立: 固定小数点マイクロプロセッサに適した制御アルゴリズムの実装方法—変数変調デルタオペレーションのモデル規範型適応制御系への適用—, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, **2**, (2008) 20.
- [15] 青木 立: MindStormsを用いたメカトロニクスに関する研究—デジタル制御アルゴリズムの実装—, 2008年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集 J34 (2008)
- [16] T. Aoki: A Robot Control Based on the Modified Delta Form, Proc. of The 17th CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics, and Control(Romansy2008), (2008) 190.
- [17] 青木立: 適応制御のメカトロニクス制御への応用 -ハイゲインフィードバック適応制御の提案-, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, **3**, (2009) 20.
- [18] 青木立: MindStormsを用いたメカトロニクスに関する研究 -デジタル制御アルゴリズムの実装(第2報), 2009年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集 H20 (2009)
- [19] T. Aoki: Micromechatronics Control Methodology Based on The Modified Delta Operator and Form using Bang-Bang Control, Proceedings of the 2009 JSME-IIP/ASME-ISPS Joint Conference on Micromechatronics for Information and Precision Equipment (2009) 379.
- [20] 青木 立: 固定小数点マイクロプロセッサに適した制御アルゴリズムの実装方法(第2報) 修正変数変調法の提案, 精密工学会誌 **75**, 7, (2009) 876.
- [21] G. Li, J. Wu and S. Chen, Sparse controller realization with small roundoff noise, IEE Proc. Control Theory and Applications, **151**, 2 (2004) 246.
- [22] G. Li, A polynomial-operator-based DFII structure for IIR filters, IEEE Trans. Circuits Syst.II, **51**, 3 (2004) 147.