

# 非定常地震応答の自乗平均値の積分値の近似計算法

青木 繁<sup>1)</sup>， 深野 あづさ<sup>2)</sup>

## AN APPROXIMATE CALCULATION METHOD FOR INTEGRAL OF MEAN SQUARE VALUE OF NONSTATIONARY SEISMIC RESPONSE

Shigeru AOKI and Azusa FUKANO

The response of the structure subjected to nonstationary random vibration such as earthquake excitation is nonstationary random vibration. Calculation method for statistical characteristics of such a response is complicated. Practical and simplified method to obtain theoretical statistical value is required. Mean square value of the response is usually used to evaluate random response. Integral of mean square value of the response corresponds to total energy of the response. In this paper, a simplified calculation method to obtain integral of mean square value of nonstationary seismic response is proposed. The structure is modeled as a single-degree-of-freedom system. Nonstationary white noise is used as input. Integral of mean square value is obtained for some value of the damping ration and the natural period. It is found that the proposed method gives exact value of integral of mean square value of the response.

Key Words : Random Vibration, Mean Square Value, Seismic Response, Nonstationary Random Vibration

### 1. 緒 言

地震動のような非定常不規則振動入力を受ける構造物の応答は非定常不規則過程となる。不規則振動の統計的特性を表す代表的な値として、自乗平均値がよく用いられる<sup>(1)</sup>。応答の自乗平均値はエネルギーとも関連がある。応答のエネルギーは免震装置などによる吸収エネルギーや累積疲労を評価するためにも用いられる<sup>(2)</sup>。応答が非定常不規則過程である場合の応答の自乗平均値の計算法は複雑である。そのために、近似計算法<sup>(3),(4)</sup>が用いられることがある。

本論文では、非定常不規則過程の自乗平均値を、定常確率過程の自乗平均値を用いて求める近似計算法を提案した。非定常不規則過程入力として、定常白色雑音に振幅非定常性を表す包絡関数を乗じて得られる非定常白色雑音を用いた。構造物の解析モデルとして1自由度系を用いた。応答の自乗平均値を定常確率過程の自乗平均値と包絡関数の自乗の積で近似した。この自乗平均値の時間に関する積分値を求めた。1自由度系の定常不規則振動応答の自乗平均値は公式として与えられている<sup>(5)</sup>。この手法は非定常不規則過程の自乗平均値の積分値を求める実用的な方法である。

### 2. 構造物の解析モデルと入力

構造物の解析モデルとして、図1に示す1自由度系を用

いた。ここで、 $m$  は構造物の質量、 $c$  は減衰係数、 $k$  はばね定数、 $x$  は構造物の絶対変位、 $y$  は地表面の絶対変位を表す。構造物と地表面の相対変位( $z=x-y$ )に関する運動方程式は、

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} \quad (1)$$

ここで、 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$  は減衰比、 $\omega_n = \sqrt{k/m}$  は固有円振動数を表す。入力加速度 $\ddot{y}(t)$ は次式で与えられる。

$$\ddot{y}(t) = I(t)s_y(t) \quad (2)$$

ここで、 $I(t)$ は入力地震波の振幅非定常性を表す包絡関数を表し、 $s_y(t)$ は定常白色雑音を表す。本論文では次式で表される包絡関数<sup>(6)</sup>を用いた。

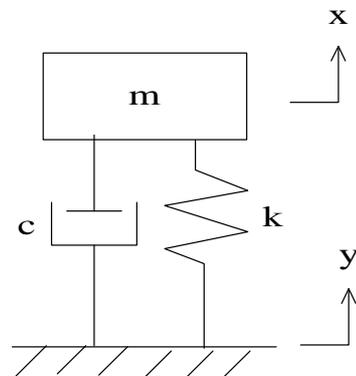


Fig.1 Single-degree-of-freedom system

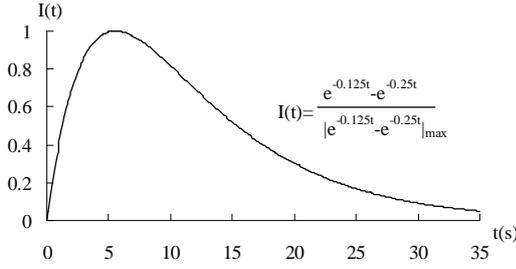


Fig.2 Envelop function

$$I(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{|e^{-at} - e^{-bt}|_{\max}} \quad (3)$$

本論文では、 $a=0.125$ ,  $b=0.25$  とした。この場合の包絡関数を図2に示す。

### 3. 非定常不規則過程の自乗平均値

相対変位  $z$  の自乗平均値は次式で与えられる自己相関関数から得られる。

$$R_z(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, t_1) G^*(\omega, t_2) S_0 d\omega \quad (4)$$

ここで、 $G(\omega, t)$  は非定常不規則過程に対するパワースペクトル密度関数に相当し、次式で与えられる。

$$G(\omega, t) = \int_0^t h(t-\xi) I(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \quad (5)$$

さらに、 $h(t)$  は単位インパルス応答関数であり、次式で与えられる。

$$h(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right) \quad (6)$$

この式で、 $G^*(\omega, t)$  は  $G(\omega, t)$  の共役複素数関数を表し、 $S_0$  は式(2)におけるホワイトノイズ  $s_s(t)$  のパワースペクトル密度を表し、 $i = \sqrt{-1}$  である。相対速度  $\dot{z}$  の自己相関関数は<sup>(1)</sup>,

$$R_{\dot{z}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_z(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (7)$$

相対変位の自乗平均値  $\sigma_z^2(t)$  および相対速度の自乗平均値  $\sigma_{\dot{z}}^2(t)$  は次式から求まる。

$$\sigma_z^2(t) = R_z(t, t) \quad (8)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = R_{\dot{z}}(t, t) \quad (9)$$

このように、 $\sigma_z^2(t)$  および  $\sigma_{\dot{z}}^2(t)$  を求めるためには、それぞれ式(4)および式(7)を用いなければならない。これらの式の計算は複雑になる。

### 4. 近似解析法

式(4)で、 $I(t)$  が  $\omega$  に独立であるとする、 $\sigma_z^2(t)$  および  $\sigma_{\dot{z}}^2(t)$  は、

$$\sigma_z^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega \quad (11)$$

ここで、

$$H_d(\omega) = \frac{-1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega i} \quad (12)$$

$$H_v(\omega) = \frac{-\omega i}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega i} \quad (13)$$

式(10)および式(11)の積分は定常応答に対するものであり、それぞれ次式のようになる。

$$\sigma_z^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} \quad (14)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} \quad (15)$$

式(14)および式(15)の計算は式(4)および式(7)よりも簡単である。式(10)および式(11)の近似が妥当であれば、応答が非定常確率過程である場合の自乗平均値を簡単に計算することができる。本論文では、式(14)および式(15)で得られた値を近似解、式(4)および式(7)を用いて式(8)および式(9)から得られた値を厳密解とよぶことにする。

応答の自乗平均値の総和は時間に関する0から無限大までの積分で与えられる。

$$I_z = \int_0^{\infty} \sigma_z^2(t) dt \quad (16)$$

近似解に対しては  $I_z$  は次式で与えられる。

$$I_z = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \left\{ |e^{-at} - e^{-bt}|_{\max} \right\}^2 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} S_0 \quad (17)$$

相対速度応答に対しては、

$$I_{\dot{z}} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \left\{ |e^{-at} - e^{-bt}|_{\max} \right\}^2 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} S_0 \quad (18)$$

$I_z$  に  $k/2$  を掛けるとポテンシャルエネルギーの総和が求まる。また、 $I_{\dot{z}}$  に  $c$  を掛けるとダンバによって吸収されたエネルギーの総和が求まる。近似解が妥当であれば、ポテンシャルエネルギーの総和およびダンバによって吸収されたエネルギーの総和を簡単に求めることができる。

### 5. 計算結果

$S_0=1(\text{m}^2/\text{s}^4/\text{rad/s})$  であると仮定して、応答の自乗平均値の積分値を求めた。式(4)の積分および式(7)の偏微分は数値計算で求めた。表1から表3に結果を示す。表1および表2

は固有周期  $T_n(2\pi/\omega_n)$  をそれぞれ 0.5s および 1.0s に固定し、減衰比  $\zeta$  が異なる場合の結果を示す。これらの表から、減衰比が異なっても近似解は厳密解と一致することが明らかになった。表 3 は減衰比を 0.01 に固定して固有周期が異なる場合の結果を示す。この表から、固有周期が異なっても近似解は厳密解と一致することが明らかになった。

6. 結言

応答が非定常確率過程である場合の応答の自乗平均値の積分値の近似計算法を提案した。構造物のモデルとして 1 自由度系を用いた。入力 は定常白色雑音に包絡関数を乗じて得られる非定常白色雑音を用いた。応答の自乗平均値を定常確率過程の自乗平均値と包絡関数の自乗の積で近似した。この方法を用いて応答の自乗平均値の積分値を計算した結果、減衰比および固有周期の値によらずに厳密解と一致することが明らかになった。

- (1) Clough,R.W. and Penzien,J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, (1993), 471-498
- (2) Soong,T.T.and Dargush,G.F., Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, Chichester, (1997), 5-34
- (3) Hasselman,T., Probabilistic Displacement Time History of a Single Degree of Freedom System, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 98-6, (1972), 519-530
- (4) Bucher,C.G., Approximate Nonstationary Random Vibration Analysis for MDOF System, Journal of Applied Mechanics, ASCE, 51-1, (1988), 197-200
- (5) Crandall,S.H. and Mark,W.D., Random Vibration in Mechanical System, Academic Press, (1963), 106-110
- (6) Shinozuka,M. and Sato,Y., Simulation of Nonstationary Random Process, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, EM1, (1967), 11-40

Table 1 Integral of mean square value of the response ( $T_n=0.5s$ )

$\zeta$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.01	$8.44 \times 10^{-1}$	$8.44 \times 10^{-1}$	$1.33 \times 10^2$	$1.33 \times 10^2$
0.02	$4.22 \times 10^{-1}$	$4.22 \times 10^{-1}$	$6.65 \times 10$	$6.67 \times 10$
0.05	$1.69 \times 10^{-1}$	$1.69 \times 10^{-1}$	$2.65 \times 10$	$2.67 \times 10$

Table 2 Integral of mean square value of the response ( $T_n=1.0s$ )

$\zeta$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.01	6.75	6.75	$2.66 \times 10^2$	$2.67 \times 10^2$
0.02	3.38	3.38	$1.33 \times 10^2$	$1.33 \times 10^2$
0.05	1.35	1.35	$5.31 \times 10$	$5.33 \times 10$

Table 3 Integral of mean square value of the response ( $\zeta=0.01$ )

$T_n(s)$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.2	$5.40 \times 10^{-2}$	$5.40 \times 10^{-2}$	$5.31 \times 10$	$5.33 \times 10$
0.5	$8.44 \times 10^{-1}$	$8.44 \times 10^{-1}$	$1.33 \times 10^2$	$1.33 \times 10^2$
0.8	3.46	3.46	$2.13 \times 10^2$	$2.13 \times 10^2$
1.0	6.75	6.75	$2.66 \times 10^2$	$2.67 \times 10^2$