LK から NK への証明の書き換えについて

On a method to transform the proofs of LK into NK

中西 泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract: Gentzen's NK and LK are famous and useful logical systems in the field of symbolic logic. NK is a natural formation of proofs we use in practice, while it is not suitable for structual analyses of proofs. On the other hand, LK is convenient for structural analyses of proofs, while it is difficult to use LK for practical proofs because the proof diagrams need too much spaces. In order to analyze structures of proofs of NK, a simple correspondance between the proofs of NK and LK must be useful. The standard method to transform the proofs of LK into NK is based on the principle that each sequent $A_1, A_2, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, B_2, \cdots, B_n$ of LK corresponds to the proof diagram of NK with the assumptions $A_1, A_2, \cdots, A_m$ and the conclusion $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$. In this paper, we show another method based on the principle that each sequent $A_1, A_2, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}, B_n$ of LK corresponds to the proof diagaram of NK with the assumptions $A_1, A_2, \cdots, A_m, \neg B_1, \neg B_2, \cdots, \neg B_{n-1}$ and the conclusion B_n. Our method is simpler than the standard method, and the proofs of NK made by our method are more natural. Consequently, our method gives an efficient algorithm of automatic proofs of NK.

Keywords: NK, LK, Proof

1. はじめに

Gentzen の NK と LK は記号論理の分野における有名な論理体系であり，いずれも有用である．NK は我々が実際に用いる推論を比較的自然に定式化したものであるが，証明構造の分析には向かない面もある．一方，LK は推論の構造を分析するのには便利であるが，推論の各時点における「仮定」をその都度書き出すことなどから，実際の推論に用いることは困難である．そこで，NK の論理構造を分析するためには，NK と LK の証明間の簡単な対応関係があれば有用と思われる．LK の証明を NK の証明に書き換えようとする際の従来の標準的な方法の基本方針は，証明の各段階における LK のシーケント $A_1, A_2, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, B_2, \cdots, B_n$ に対し，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ を仮定とし $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$ を結論とする NK の証明図を対応させるというものであるが，この方法では LK の 1 ステップに対応する NK のステップが数が多くなり，理論的には問題はないが実用的とはいえない．これに対し，本稿で提案する方法の基本方針は，LK の上記のシーケントに対し，$A_1, A_2, \cdots, A_m, \neg B_1, \neg B_2, \cdots, \neg B_{n-1}$ を仮定とし B_n を結論とする NK の証明図を対応させるというものである．この方法は，シーケントの左端と右端の論理式が推論に関与するような書式の LK 体系に適用した場合，LK の 1 ステップに対応する NK のステップ数が極めて少なく，結果として得られる NK の証明も従来のものより自然なものになる．一般に LK の証明図は，図を下から書いていくことによって機械的に作成できることが知られている．従って本稿の方法は NK の証明図を機械的に作成する方法，すなわち自動証明法を与えることになる．これは勿論従来の方法でも理論的には可能であるが，本稿の方法の方が簡単である分効率的であり，しかもその NK の証明は，より人間の発想に近い自然なものになる．

2. 述語論理

本稿では 1 階の述語論理を用いて証明の書き換え手続きの説明を行う．そこでまず，本稿で使用する述語論理の言語を規定する．

まず，原始記号として以下のものを定める．

都立産業技術高専　ものづくり工学科

(1) 論理記号：$\to, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$　(2) 自由変数：$a_1, a_2, a_3, \cdots$　(3) 束縛変数：$x_1, x_2, x_3, \cdots$
(4) 個体記号：$c_1, c_2, c_3, \cdots$　(5) 関数記号：$f_1, f_2, f_3, \cdots$　(6) 述語記号：$p_1, p_2, p_3, \cdots$

ここで，(5) の各 f_i には 1 以上の自然数 n_i が 1 つづつ対応しており，f_i は n_i 変数関数記号と呼ばれる．(6) に関しても同様である．次に「項」を定義する．

(1) 自由変数及び個体記号は項である．
(2) f が n 変数関数記号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ が n 個の項ならば，$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ も項である．
(3) 以上によって項とされるもののみが項である．

さらに,「論理式」を定義する．

(1) p が n 変数述語記号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ が n 個の項ならば，$p(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は論理式である．
(2) A, B が論理式なら，$A \to B, A \wedge B, A \vee B, \neg A$ はすべて論理式である．
(3) $F(a)$ が自由変数 a を含み束縛変数 x を含まない論理式なら，$\forall x F(x)$ 及び $\exists x F(x)$ は論理式である．但し，$F(x)$ は $F(a)$ の中のすべての a に x を代入した結果とする．
(4) 以上によって論理式とされるもののみが論理式である．

以下では，論理式を $A, B, C, \cdots, A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ 等の記号によって表し，自由変数 a を含む論理式を $F(a)$ 等の記号によって表す．

LK においては，さらに「シーケント」が定義される．A_1, A_2, $\cdots$, A_m と B_1, B_2, $\cdots$, B_n が論理式の列であるとき，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m \Longrightarrow B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$$

という形の図形をシーケントという．意味論的には,「(A_1かつ A_2かつ $\cdots$ かつ A_m) ならば (B_1または B_2または $\cdots$ または B_n)」を表す．ただし，左辺や右辺は空であっても良い．以下において有限個 (0 個を含む) の論理式の列を記号 $\Gamma, \Delta, \cdots$ によって表す．従って，一般にシーケントは $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ と表すことができる．

以上の言語を用いて NK を定義することができるが，その証明の定義，推論規則等は通常通りとする．LK についても，証明の定義等は通常通りとするが，推論規則についてはいくつかの流儀があるので，本稿では次のものを採用する：

(左増) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$　(右増) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}$

(左減) $\dfrac{A,\ A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$　(右減) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A,\ A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}$

(左換) $\dfrac{\Gamma,\ A,\Pi \Longrightarrow \Delta}{A,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta}$　(右換) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A,\Sigma}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\ A}$

(cut) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \qquad A,\Pi \Longrightarrow \Sigma}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma}$

(左$\neg$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}{\neg A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$　(右$\neg$) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\neg A}$

(左$\wedge$) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$　$\dfrac{B,\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$　(右$\wedge$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \quad \Pi \Longrightarrow \Sigma,\ B}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\ A \wedge B}$

(左$\vee$) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta \quad B,\Pi \Longrightarrow \Delta}{A \vee B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta}$　(右$\vee$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \vee B}$　$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \vee B}$

(左$\to$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \qquad B,\Pi \Longrightarrow \Sigma}{A \to B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma}$　(右$\to$) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \to B}$

(左$\forall$) $\dfrac{F(t),\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Delta}$ (t は任意の項)　(右$\forall$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ F(a)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \forall x F(x)}$ (a は下式内にない自由変数)

(左$\exists$) $\dfrac{F(a),\Gamma \Longrightarrow \Phi}{\exists x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Phi}$ (aは下式内にない自由変数)　(右$\exists$) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow F(t)}{\Gamma \Longrightarrow \exists x F(x)}$ (tは任意の項)

3. 書き換え手続き

本節では，LK と NK 間の証明の書き換え手続きを説明する．

まず，標準的ではあるが NK の証明図から LK の証明図をつくる方法を説明する．NK の証明図における各論理式 Φ に対し，Φ を導くための仮定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を用いてシーケント $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m \Longrightarrow \Phi$ をつくり（ただし，Φ が矛盾記号 $\bot$ の場合にはシーケントの右辺は空列とする），Φ をこのシーケントに置き換える．こうして出来た図はまだ S の証明図にはなっていないが，もとの NK の証明図において（$\neg$導入），（$\land$ 導入），（$\lor$導入），（$\to$ 導入），（$\forall$ 導入），（$\exists$ 導入）による推論が行われた部分は，新しい図において LK の推論と見なすことができる．それ以外の推論の例として，NK の（$\to$ 除去）による推論を見てみよう．この規則による推論部分は，

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

という形をしており，この部分をシーケントに置き換えたときには

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Pi \Longrightarrow A \to B}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow B}$$

という形なるが，これはLK の推論そのものではない．しかしこの推論は，LK の推論規則を使って次のように実現することができる．

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \Longrightarrow A \to B \qquad \dfrac{A \Longrightarrow A \qquad B \Longrightarrow B}{A \to B,\ A \Longrightarrow B}}{\Pi,\ A \Longrightarrow B}}{A,\Pi \Longrightarrow B}}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow B}$$

同様にして，（$\neg$除去），（$\neg\neg$除去），（$\land$ 除去），（$\lor$除去），（$\forall$ 除去），（$\exists$ 除去）による推論が行われた部分に対応する部分も，LK の推論で実現することができる．

次に，本稿の主題である，LK の証明図から NK の証明図をつくる方法を述べる．方針としては，LK の証明図のシーケントを始式から終式に向かって見ていきながら，次のようにして NK の推論図を順次書き足していく．LK の各シーケント $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m \Longrightarrow B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$ に対し，それまでに構成した NK の推論図を部分として含み，$A_1, A_2, \cdots, A_m, \neg B_1, \neg B_2, \cdots, \neg B_{n-1}$ を仮定として B_n（$n=0$ の場合は矛盾記号 $\bot$）を結論とするような LK の推論図を構成する．ただし，LK の推論図において仮定 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \neg B_1, \neg B_2, \cdots, \neg B_{n-1}$ のそれぞれが出現する位置および回数（0 回を含む）には制限はないものとする．以下，具体例を用いて説明する．LK の証明図の最初の部分の例として，次のような形を考える．

(3.1)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Longrightarrow A}{A \land B \Longrightarrow A}}{\Longrightarrow A,\ \neg(A \land B)} \qquad \dfrac{\dfrac{B \Longrightarrow B}{B \Longrightarrow A \lor B}}{\Longrightarrow A \lor B,\ \neg B}}{\Longrightarrow A,\ A \lor B,\ \neg(A \land B) \land \neg B}$$
$$\vdots$$

まず，この図の左上のシーケント $A \Longrightarrow A$ に対し，A を仮定とし A を結論とする NK の推論図，すなわち次のような，A のみからなる推論図を書く．

$$A$$

図 (3.1) の次のシーケントは $A \land B \Longrightarrow A$ であるから，上の図に書き加えることによって次のように $A \land B$ を仮定として A を結論とするような NK の推論図を得る．

$$\frac{A \land B}{A}$$

図 (3.1) の次のシーケントは $\Longrightarrow A,\ \neg(A \land B)$ であるから，上の図にさらに書き加えることによって次のように $\neg A$ を仮定として $\neg(A \land B)$ を結論とするような NK の推論図を得る．

(3.2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{A \land B}}{A} \qquad \neg A}{\bot}\ (1)}{\neg(A \land B)}$$

一方，図 (3.1) の右上のシーケント $B \Longrightarrow B$ には B のみからなる NK の推論図が対応し，図 (3.1) の次のシーケント $B \Longrightarrow A \vee B$ に対応して次の推論図が得られる．

$$\dfrac{B}{A \vee B}$$

さらに，図 (3.1) の次のシーケント $\Longrightarrow A \vee B, \neg B$ に対応して次の推論図が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{B}}{A \vee B} \quad \neg(A \vee B)}{\perp}}{\neg B}\,(2) \tag{3.2}$$

図 (3.1) の最後のシーケントは $\Longrightarrow A, A \vee B, \neg(A \wedge B) \wedge \neg B$ であるが，これに対応する NK の推論図は，図 (3.2) と図 (3.2) を組み合わせ，さらに書き足すことによって次のようにつくられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{A \wedge B}}{A} \quad \neg A}{\perp}}{\neg(A \wedge B)}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{B}}{A \vee B} \quad \neg(A \vee B)}{\perp}}{\neg B}\,(2)}{\neg(A \wedge B) \wedge \neg B}$$

このように，LK の推論の上式に対応する NK の推論図を用いて下式に対応する NK の推論図をつくるという操作を繰り返し，LK の推論図の終式 $\Longrightarrow E$ に到ったときには，仮定なしで E を結論とする NK の証明図を得ることになる．問題は，各段階で常にこの作業が可能であるかどうかである．例として，LK における (左 $\rightarrow$) 規則による推論

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi \Longrightarrow \Sigma, \Phi}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Longrightarrow \Delta, \Sigma, \Phi}$$

で考えてみる．ここで，NK の証明図との対応を見る関係上，たかだか 1 つの論理式を表す記号として Φ を用いた．Φ が空列の場合は Σ も空列と考える．この上式まで作業が進んだ時点では，Γ, $\neg\Delta$（$\neg\Delta$ は Δ の各論理式の否定からなる列）を仮定として A を結論とする NK の証明図と，B, Π, $\neg\Sigma$ を仮定として Φ（空列の場合は $\perp$）を結論とする証明図が得られているので，それぞれ

$$\begin{array}{c} \Gamma \quad \neg\Delta \\ \cdots\cdots \\ A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} B \quad \Pi \quad \neg\Sigma \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Phi \end{array}$$

で表す．ここでは，右の図において仮定 B が一回だけ出現する例を示しているが，実際の証明図における仮定 B の出現回数には制限がないため，複数回出現するかも知れないし一度も出現しないかも知れない．次に下式に進み，$A \rightarrow B, \Gamma, \Pi$, $\neg\Delta$, $\neg\Sigma$ を仮定として Φ を結論とする証明図を作るには，次のようにすればよい．

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \quad \neg\Delta \\ \cdots\cdots \\ A \end{array} \qquad A \rightarrow B}{B} \quad \Pi \quad \neg\Sigma \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi \end{array}$$

ただし，この図において B を導いている推論部分は，前段階において仮定 B が複数個あった場合はその各々の B の上部に書かれることになるし，仮定 B が 0 個であった場合には不要となる．LK の他のすべての推論規則についても，同様の操作を行うことができる．すなわち，上式に対応する NK の推論図を用いて，下式に対応する NK の推論図をつくることができる．以下，LK の各々の推論規則と，それに対応する NK の推論図を示す．(但し，LK のシーケントに対応する NK の推論図において，それぞれの仮定の出現する位置および回数に制限がないことから，(左増)，(左減)，(左換) の規則による推論に関しては，対応する NK の推論図を変化させる必要はない．)

（右増）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow A} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B,\, A}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \qquad \neg\Delta \\ \vdots \\ B \qquad \neg B\end{array}}{\bot}}{A}$$

（右減）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A,\, A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \qquad \neg\Delta \qquad \overset{(1)}{\neg A} \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \overset{(1)}{\neg A}}{\bot}\,(1)}{\neg\neg A}}{A}$$

（右換）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A,\Sigma,\, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\, B,\, A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \qquad \neg\Delta \qquad \overset{(1)}{\neg A} \qquad \neg\Sigma \\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \neg B}{\bot}\,(1)}{\neg\neg A}}{A}$$

（cut）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \qquad A,\Pi \Longrightarrow \Sigma,\Phi}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\Phi}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\Gamma \qquad \neg\Delta \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \Pi \qquad \neg\Sigma \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

（左¬）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A}{\neg A,\Gamma \Longrightarrow} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B,\, A}{\neg A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \neg A}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \neg\Delta \quad \overset{(1)}{\neg B} \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \neg A}{\bot}\,(1)}{\neg\neg B}}{B}$$

（右¬）

$$\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow \neg A} \qquad \dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B,\neg A}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(2)}{A} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,(2) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(3)}{A} \quad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ B \qquad \neg B\end{array}}{\bot}\,(3)}{\neg A}$$

（左∧）

$$\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi} \qquad \dfrac{B,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ \Phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{A \wedge B}{B} \qquad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

（右∧）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \qquad \Pi \Longrightarrow \Sigma,\, B}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\, A \wedge B}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi \quad \neg\Sigma \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

（左∨）

$$\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi \qquad B,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Phi}{A \vee B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Phi}$$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}\overset{(1)}{A} \quad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ \Phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overset{(1)}{B} \quad \Pi \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ \Phi\end{array}}{\Phi}\,(1)$$

（右∨）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \vee B}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \vee B}$$

（左→）

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \qquad B,\Pi \Longrightarrow \Sigma,\Phi}{A \to B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Sigma,\Phi}$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad A \to B}{B} \qquad \Pi \quad \neg\Sigma \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

（右→）

$$\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, A \to B}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(1)}{A} \quad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\,(1)$$

（左 ∀ ）
$$\frac{F(t),\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}{\forall x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}$$
（t は任意の項）

$$\begin{array}{c} \dfrac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad \Gamma \qquad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi \end{array}$$

（右 ∀ ）
$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, F(a)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \forall x F(x)}$$
（a は下式内にない自由変数）

$$\begin{array}{c} \Gamma \qquad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{F(a)}{\forall x F(x)} \end{array}$$

（左 ∃ ）
$$\frac{F(a),\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}{\exists x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Delta,\Phi}$$
（aは下式内にない自由変数）

$$\dfrac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c} (1) \\ F(a) \quad \Gamma \quad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi \end{array}}{\Phi}\,(1)$$

（右 ∃ ）
$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, F(t)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \exists x F(x)}$$
（tは任意の項）

$$\begin{array}{c} \Gamma \qquad \neg\Delta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{F(t)}{\exists x F(x)} \end{array}$$

6. おわりに

LK の証明を NK の証明に書き換える従来の方法はシーケントの通常の意味付けに合致したやり方ではあるが，この方法によって得られた NK の証明は NK 本来の特徴である「自然な証明」とは言い難い．本稿で提案した書き換え手続きは，この点を改良したものである．本稿の書き換え手続きは，例えば NK で書かれた証明の効率化を図る場合などにも有用となる．すなわち，NK で書かれた証明よりも LK の証明の方が構造を分析しやすいため，その効率化を議論するには適している．そしてもし LK において証明の効率化の一般論ができれば，それを NK に翻訳することにより，自然かつ効率的な NK の証明の手法を得ることができる．

7. 参考文献

[1] 松本　和夫 : 数理論理学，共立，1970

[2] N.W. テニント : 自然演繹の論理学，八千代，1981

[3] 竹内　外史，八杉　満利子 : 証明論入門，共立，1988

[4] 日本数学会 : 岩波数学辞典，第 4 版，岩波，2007