座標を持つ集合上の differential の導入法

Introduction of Differentials on Sets with Coordinates

中西 泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract: Functions which appear in physics and engineering are defined on various sets with certain coordinates. The differentials of those functions play important roles in deriving differential equations. However, students have no opportunity to study differentials in the first course of analysis, because the usual definition of the differential is based on the concept of dual tangent spaces which are unfamiliar to beginners. In this paper, the author suggests a simpler way to introduce differentials on any set which has global coordinates. The basic idea of our definition is to regard the differential df of a function f as a mapping of two variables from the base space M and the coordinate system S to the row vector space $\mathbf{R}_n$. Though this definition is more direct than the usual one, it is linked to the general theory because the value of df in our definition represents the components of df as a covariant tensor at a point with respect to a coordinate. This method is expected to fill the gaps between analysis and it's applications.

Keywords: differential, coordinate

1. はじめに

物理や工学で取り扱われる関数は，何らかの座標を持つさまざまな物理的集合上に定義域を持っている．それらの関数 f に対し df という記号で表現される対象は「微小増分」として直感的に扱われ，微分方程式を立てる際に多用される．この df は数学的には differential と呼ばれるが，その厳密な定義は微積分の初級コースでは取り扱われないのが普通である．理由は，多様体上の双対接ベクトル場としての differential の定義が初学者にとって抽象的過ぎ，微小増分としての直感的イメージに結び付きにくい点にあると思われる．

筆者は [1] において，座標を持つ任意の集合上の関数の，その座標による微分の概念を導入した．本稿では，その線に沿って初等的に differential を導入するひとつの方法を提案したい．

2. 座標を持つ集合上の微分

本節では，[1] に沿って，座標を持つ集合上の微分を定義していく．M は任意の集合とする．ただし，これから M 上の座標や微分を考えようとする意味で，M の要素のことを「点」と呼び，記号 P, Q 等で表わすことにする．まず，M の「座標」（グローバル座標）の概念を，次のように定義する：

[定義]　M 上の n 個の実関数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が次の 2 つの性質を満たす時，これを M の n 次元座標という：

（1）M の点 P, Q が $x_1(P) = x_1(Q), x_2(P) = x_2(Q), \cdots, x_n(P) = x_n(Q)$ をすべて満たすのは，$P = Q$ の場合に限る．

（2）M の任意の点 P に対し，次を満たすような正の数 ϵ が存在する：
$\sqrt{(a_1 - x_1(P))^2 + (a_2 - x_2(P))^2 + \cdots + (a_n - x_n(P))^2} < \epsilon$ を満たすような任意の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，$a_1 = x_1(Q), a_2 = x_2(Q), \cdots, a_n = x_n(Q)$ となるような M の点 Q が存在する．

ここで,（1）は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のつくる M から n 次実数空間への写像が単射であること,（2）は同写像の値域が開集合であることを述べたものである．

次に，m 個の関数の組の n 次元座標による微分を，フレシェの方式に従って $m \times n$ 行列として定義する：

都立産業技術高専　ものづくり工学科

[定義]　$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が集合 M の座標であるとする．M 上の m 個の関数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ および M の点 P に対し，mn 行列 $\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ は次のような行列とする：

$$\sqrt{(x_1(Q)-x_1(P))^2+(x_2(Q)-x_2(P))^2+\cdots+(x_n(Q)-x_n(P))^2}\longrightarrow 0 \text{ のとき，}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} f_1(Q)-f_1(P)\\ f_2(Q)-f_2(P)\\ \cdots\\ f_m(Q)-f_m(P)\end{pmatrix}-\dfrac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)\begin{pmatrix} x_1(Q)-x_1(P)\\ x_2(Q)-x_2(P)\\ \cdots\\ x_n(Q)-x_n(P)\end{pmatrix}}{\sqrt{(x_1(Q)-x_1(P))^2+(x_2(Q)-x_2(P))^2+\cdots+(x_n(Q)-x_n(P))^2}}\longrightarrow 0$$

さて，この $\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ は常に存在するとは限らないが，これが M のすべての点 P に対して存在する場合には，$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ は M から $m\times n$ 行列全体の集合への写像と見ることができる．この写像 $\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ を，$(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ の $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ による微分という．

次に偏微分を定義する．

[定義]　$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が集合 M の座標であるとする．M 上の関数 f および M の点 P に対し，実数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を次のように定義する：

$$x_j(Q)=x_j(P)\ (j\neq i),\ \ x_i(Q)\longrightarrow x_i(P) \text{ のときの } \frac{f(Q)-f(P)}{x_i(Q)-x_i(P)} \text{ の極限を } \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \text{ とする．}$$

さて，この $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ は常に存在するとは限らないが，これが M のすべての点 P に対して存在する場合には，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は M 上の関数と見ることができる．この関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ を，f の x_i による偏微分という．

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が集合 M の座標，$f_1,f_2,\cdots,f_m$ が M 上の m 個の関数であるとする．M の点 P に対して $\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ が存在するとき，$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ も存在し，次の式が成り立つ（証明略）：

$$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P)\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P)\cdots\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P)\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P)\cdots\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P)\\ \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P)\ \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P)\cdots\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P)\end{pmatrix}$$

一般に，M 上の mn 個の関数 $f_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,n)$ が存在するとき，M の任意の点 P に対して行列 $\begin{pmatrix} f_{11}(P)\cdots f_{1n}(P)\\ \cdots\\ f_{m1}(P)\cdots f_{mn}(P)\end{pmatrix}$ を対応させる写像を $\begin{pmatrix} f_{11}\cdots f_{1n}\\ \cdots\\ f_{m1}\cdots f_{mn}\end{pmatrix}$ と書くことにすると，M のすべての点 P に対して $\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ が存在する場合には，

$$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\ \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

と書くことができる．

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ が集合 M の座標，$f_1,f_2,\cdots,f_m$ が M 上の関数であるとする．M の点 P に対し，$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(u_1,u_2,\cdots,u_n)}(P)$ および $\frac{d(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ が存在するとき，$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$ も存在して次の連鎖律が成り立つ：

$$\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)=\frac{d(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{d(u_1,u_2,\cdots,u_n)}(P)\frac{d(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)$$

3. 座標系と differential

本節では，M 上の関数 f の differential df を定義する．準備として，まず「座標系」を次のように定義する：

[定義]　M の n 次元座標からなる集合 S が次の 2 つの性質を満たす時，これを M の n 次元座標系という：

（1）S の任意の元 $(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ に対し，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ によって微分可能で

ある．

（2）M の座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と S の任意の元 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対し，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ によって微分可能でありかつ，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ によって微分可能であるとき，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は S に含まれる．

以下においては，集合 M にはひとつの座標系 S が付随しているものとする．

続いて「微分可能性」を定義する：

[定義]　M 上の関数 f が微分可能であるとは，f が S の任意の元で微分可能であることとする．

以上の準備のもとに，differential を定義することができる：

[定義]　M 上の微分可能関数 f の differential df は，M，S から n 次行ベクトル空間 $\mathbf{R}_n$ への 2 変項写像として，次のように定義される．M の任意の点 P，S の任意の座標 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，

$$df(P, x) = \frac{df}{dx}(P)$$

さらに，この differential に関する演算を次により定義する：

[定義]　M 上の微分可能関数 f，M，S から $\mathbf{R}^n$ 上の 2 変項写像 ω，η に対し，$f\omega$ および $\omega + \eta$ は，次のように定義される M，S から $\mathbf{R}^n$ への 2 変項写像である．M の任意の点 P，S の任意の座標 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&(f\omega)(P, x) = f(P)\omega(P, x), \\
&(\omega + \eta)(P, x) = \omega(P, x) + \eta(P, x)
\end{aligned}$$

以上の準備のもと，M 上の微分可能関数 f および S の座標 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ に対し次の式が成り立つ：

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}du_n$$

[証明]　M の任意の点 P，S の任意の座標 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，

$$\begin{aligned}
df(P, x) &= \frac{df}{dx}(P) = \frac{df}{du}(P)\frac{du}{dx}(P) = \left(\ \tfrac{\partial f}{\partial u_1}(P)\ \tfrac{\partial f}{\partial u_2}(P) \cdots \tfrac{\partial f}{\partial u_n}(P)\ \right) \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx}(P) \\ \frac{du_2}{dx}(P) \\ \cdots \\ \frac{du_n}{dx}(P) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial u_1}(P)\frac{du_1}{dx}(P) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(P)\frac{du_2}{dx}(P) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(P)\frac{du_n}{dx}(P) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u_1}(P)du_1(P, x) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(P)du_2(P, x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(P)du_n(P, x) \\
&= \left(\ \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}du_n\ \right)(P, x)
\end{aligned}$$

4. differential の幾何的イメージ

本節では，前節で定義した differential と,「微小増分」としての differential のイメージとの関連を考察する．準備として，まず次の記号を用意する：

[定義]　n 次座標系 S を持つ M の点 P，座標 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$，$a \in \mathbf{R}^n$ に対し，

$$a = \begin{pmatrix} x_1(Q) - x_1(P) \\ x_2(Q) - x_2(P) \\ \cdots \\ x_n(Q) - x_n(P) \end{pmatrix}$$

となるような M の点 Q が存在する時，その点 Q を記号 $Q = P + (x, a)$ で書き表わす．

さて，関数 f の座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ による微分の定義式により，

$\sqrt{(x_1(Q)-x_1(P))^2+(x_2(Q)-x_2(P))^2+\cdots+(x_n(Q)-x_n(P))^2}\approx 0$ のとき，

$$\frac{f(Q)-f(P)-\dfrac{df}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)\begin{pmatrix} x_1(Q)-x_1(P)\\ x_2(Q)-x_2(P)\\ \cdots\\ x_n(Q)-x_n(P)\end{pmatrix}}{\sqrt{(x_1(Q)-x_1(P))^2+(x_2(Q)-x_2(P))^2+\cdots+(x_n(Q)-x_n(P))^2}}\approx 0\ ,$$

従って，

$$\frac{df}{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(P)\begin{pmatrix} x_1(Q)-x_1(P)\\ x_2(Q)-x_2(P)\\ \cdots\\ x_n(Q)-x_n(P)\end{pmatrix}\approx f(Q)-f(P)$$

が成り立つ．ここで，

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ ,\qquad a=\begin{pmatrix} x_1(Q)-x_1(P)\\ x_2(Q)-x_2(P)\\ \cdots\\ x_n(Q)-x_n(P)\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\frac{df}{dx}(P)a\approx f(Q)-f(P)$$

すなわち，

$$df(P,\varphi)a\approx f(P+(x,a))-f(P)$$

となる．つまり，a が微小ベクトルである場合，$df(P,x)a$ は，点が P から近くの点 $P+(x,a)$ に移ったときの f の値の微小増分を表わしている．

5. おわりに

現在の高専，大学のカリキュラムにおいては，物理や工学に登場する諸関数の differential を直感的に処理する能力の養成は，物理系基礎科目に任されているように思う．微小増分としての直感的イメージによって differential を扱うことは勿論大切であるが，その一方で数学の授業において differential の厳密な定義を明確に示すことも必要であろう．

筆者は従来より，現在の微積分教育が微分商に重きを置き過ぎていると感じていたが，本方式により differential に重きを置いた授業展開も可能であり，それによって応用科目とのギャップを埋めることができると考えている．

6. 参考文献

[1] 中西　泰雄：座標を持つ集合上の微分法の導入について，都立高専研究報告第 40 号，pp.131-134，2005

[2] スピヴァック：多変数解析学，東京図書，1972

[3] 有馬　哲，浅枝　陽：ベクトル場と電磁場，東京図書，1987

[4] 松島　与三：多様体入門，掌華房，1965

[5] 村上　信吾，多様体，共立出版，1981