有理型函数の微分多項式の値分布について

On value distribution of differential polynomials of meromorphic functions

澤田 一成

Kazunari Sawada

In the value distribution theory of meromorphic functions, the relative growth of a given function and its derivative plays a very important role. Since R. Nevanlinna proved the importance of the logarithmic derivative f'/f of a meromorphic function f in his theory of value distribution in 1925, a number of interesting results of the relative growth of meromorphic functions and their derivatives have been found out. Furthermore, many mathematicians have recently investigated the value distribution of the differential 'polynomials' with respect to meromorphic functions. In 1973, Gopalakrishna and Bhoosnurmath gave some estimations of the relative growth of meromorphic functions and their homogeneous differential polynomials. However their results have an unnecessary condition; the 'homogeneousness' of the polynomials. In this paper we consider all differential polynomials of transcendental meromorphic functions on the complex plane, and we give some (upper and lower) estimations of comparative growth of the characteristic functions of meromorphic functions and their differential polynomials. Our results extend the result of Gopalakrishna and Bhoosnurmath.

Keywords: Nevanlinna theory, Value distirbution, Differential polynomials, Characteristic functions, Comparative growth.

1. はじめに

値分布理論において函数 f とその導函数 f' との間の comparative growth は基本的であるが，しかし大変重要な役割を持っている．1925 年に R. Nevanlinna がはじめて有理型函数の値分布論を展開した際，有理型函数 f の対数導函数 f'/f の近接函数が決定的な役割を果たした（下記 Lemma 1 参照）．以来，多くの数学者によって f とその導函数の様々な評価式が精力的に研究されている．例えば，A.Edrei, W.H.J.Fuchs, A.Bernstein, W.K.Hayman, A.Wietsman は f と f' の特性函数の比の極限値に対して詳細な評価式を与えている（Hayman[2] 参照）．また，これらの結果を f とその k 階導函数 $f^{(k)}$ へ拡張する問題については，Hayman, C.T.Chuang, C.C.Yang, M.L.Fang が興味深い結果を与えている．さらに，近年，函数 f と，その導函数の多項式である微分多項式との関係を解明する問題が多くの数学者によって研究されるようになった．代数微分方程式を解くことは与えれらた微分多項式が恒等的に 0 となるような函数の型を決定する問題ととらえることができる．従って，微分多項式の値分布論的な性質，例えば，微分多項式の除外値，あるいは零点や極の分布状態，その位数などを調査することによって，与えられた微分方程式が一価函数解を持たない本質的な原因の解明が可能となる．

ここで本論文で用いる用語，記号等の厳密な定義を与える．

定義． $f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された有理型函数とする．$M_j[f]$ が $f(z)$ の **（微分）単項式** とは，次の型の式をいう：

$$M_j[f] := a_j(z)(f(z))^{n_{0j}}\left(f'(z)\right)^{n_{1j}}\cdots\left(f^{(k)}(z)\right)^{n_{kj}}.$$

ただし，$n_{0j}, n_{1j}, \dots, n_{kj}$ は非負整数である．また $a_j(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数で，f の特性函数 $T(r,f)$ に関して small なものとする．このとき，$d(M_j) := \sum_{i=0}^{k} n_{ij}$ を $M_j[f]$ の **次数（degree）**，$\Gamma_{M_j} := \sum_{i=0}^{k}(i+1)\,n_{ij}$ を $M_j[f]$ の **weight** という．

次に，$P[f]$ が函数 $f(z)$ の **微分多項式** とは，次の型の式をいう：

$$P[f] := \sum_{j=1}^{n} M_j[f] = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)(f(z))^{n_{0j}}\left(f'(z)\right)^{n_{1j}}\cdots\left(f^{(k)}(z)\right)^{n_{kj}}.$$

都立産業技術高専　一般科

このとき，$\overline{d}(P) := \max_{1\leqq j\leqq n} d\left(M_j\right)$，$\underline{d}(P) := \min_{1\leqq j\leqq n} d\left(M_j\right)$，$\Gamma_P := \max_{1\leqq j\leqq n} \Gamma_{M_j}$ をそれぞれ，微分多項式 $P[f]$ の**次数（degree）**，**劣次数（lower degree）**，**weight** という．

特に，$\overline{d}(P) = \underline{d}(P)$ となる微分多項式を**斉次微分多項式**という．

なお，本論文では Nevanlinna 理論の知識を仮定する．記号や定義等については，Hayman[2] を参照されたい．

1973 年に H.S.Gopalakrishna と S.S.Bhoosnurmath[1] は Hayman の定理を拡張し，次の結果を証明した：

定理 A (Gopalakrishna and Bhoosnurmath[1]). $f(z)$ を有限位数の有理型函数とし，$P[f]$ は定数ではない斉次微分多項式とする．$P[f]$ の次数を n とするとき，次が成立する：

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)} \leqq n\Big(m + 1 - m\Theta(\infty, f)\Big).$$

ここで，m は $P[f]$ に現われる微分の階数の最大値である．

さらに，$P[f]$ に $f(z)$ が含まれない（つまり，$P[f]$ は $f(z)$ の導関数の多項式である）ならば，次の評価が成り立つ：

$$n\sum_a \delta(a, f) \leqq \delta(0, P[f]) \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)}, \qquad n\sum_a \delta(a, f) \leqq \Delta(0, P[f]) \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)}.$$

定理 A は考察する微分多項式に斉次性が仮定されており，任意の微分多項式に適用することはできない．そこで本論文では，この条件を取り除き，定理 A を一般の微分多項式に拡張することを試みる．すなわち，次の定理を証明する：

定理 1. $f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義される有理型函数とし，$P[f]$ は定数ではない f の微分多項式とする．このとき，f と $P[f]$ の特性函数の比の上極限について，次の評価が成り立つ：

$$\limsup_{r\to\infty, r\notin E} \frac{T\left(r, P[f]\right)}{T\left(r, f\right)} \leqq \Gamma_P + \Big(\overline{d}\left(P\right) - \underline{d}\left(P\right)\Big)\Delta(0, f) - \Big(\Gamma_P - \overline{d}\left(P\right)\Big)\Theta(\infty, f)\,. \tag{1}$$

Remark：微分多項式 $P[f]$ が斉次で，その次数を n とし，微分の階数の最大値を m とすると，$\overline{d}(P) - \underline{d}(P) = n - n = 0$ であり，さらに，

$$\Gamma_{M_j} = \sum_{i=0}^{k} \left(i+1\right) n_{ij} \leqq \sum_{i=0}^{k} \left(k+1\right) n_{ij} = \left(k+1\right) \sum_{i=0}^{k} n_{ij} = \left(k+1\right) n \leqq \left(m+1\right) n,$$

より，$\Gamma_P = \max_j \Gamma_{M_j} \leqq (m+1)\, n$ なので，$1 - \Theta(\infty, f) \geqq 0$ に注意して，(1) 式より

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty, r\notin E} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)} &\leqq \Gamma_P - \Big(\Gamma_P - n\Big)\Theta(\infty, f) = \Gamma_P\Big(1 - \Theta(\infty, f)\Big) + n\Theta(\infty, f) \\ &\leqq (m+1)\, n\Big(1 - \Theta(\infty, f)\Big) + n\Theta(\infty, f) = n\Big(m + 1 - m\Theta(\infty, f)\Big).\end{aligned}$$

従って，定理 1 は定理 A の一般化となっている．

$T(r, P[f])$ と $T(r, f)$ の比の下からの評価として，次の結果が得られる：

定理 2. $f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義される有理型函数とし，$P[f]$ は定数ではない f の微分多項式とする．$P[f]$ が $f(z)$ を含まなければ，つぎの評価式が成り立つ：

$$\underline{d}(P) \sum_a \delta\left(a, f\right) \leqq \delta\left(0, P[f]\right) \limsup_{r\to\infty, r\notin E} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)}, \tag{2}$$

$$\underline{d}(P) \sum_a \delta\left(a, f\right) \leqq \Delta\left(0, P[f]\right) \liminf_{r\to\infty, r\notin E} \frac{T(r, P[f])}{T(r, f)}. \tag{3}$$

ただし，左辺の和は $\delta(a, f) > 0$ となる全ての $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に対してとられる．

これら２つの定理の系として，次の結果が得られる：

系． $f(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義される有理型函数で，$\sum_a \delta(a,f)=1$，$\Theta(\infty,f)=1$ をみたすものとし，$P[f]$ は f の斉次な非定数微分多項式で，$f(z)$ を含まないとする．このとき，次が成り立つ：

$$\delta(0,P[f])=\Delta(0,P[f])=1. \tag{4}$$

Remark：$\delta(\alpha,F)$ は函数 F による複素数 α の除外指数と呼ばれ，F が α をとる度合を示した量である．一般に $\delta(\alpha,F)$ は 0 から 1 の間の実数値をとり，1 に近いほど F が α を取りにくいことを示している．つまり，上の系は，f を含まない斉次微分多項式 $P[f]$ は，ほとんど零点を持たないことを示している．

2. 証明の準備

この節では，定理群の証明のための準備を行う．

Lemma 1 (Nevanlinna[4]). $f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数とするとき，

$$m\left(r,\frac{f^{(\ell)}}{f}\right)\leq C_1\log r+C_2\log T(r,f)\,,$$

が成立する．ただし，r は長さ有限な集合 E の外側を通って $r\to\infty$ となるものとし，C_1，C_2 は定数，ℓ は正整数である．

Lemma 2. $f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数とし，$P[f]$ を f の非定数微分多項式とするとき，

$$m\left(r,\frac{P[f]}{f^{\overline{d}(P)}}\right)\leqq\Big(\overline{d}(P)-\underline{d}(P)\Big)m\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\,.$$

Proof. $P[f]=\sum_{j=1}^n M_j[f]=\sum_{j=1}^n a_j(z)(f)^{n_{0j}}(f')^{n_{1j}}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{n_{kj}}$ とすると，

$$\frac{P[f]}{f^{\overline{d}(P)}}=\sum_{j=1}^n a_j(z)\left(\frac{f'}{f}\right)^{n_{1j}}\left(\frac{f''}{f}\right)^{n_{2j}}\cdots\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)^{n_{kj}}\left(\frac{1}{f}\right)^{\overline{d}(P)-d\left(M_j\right)}. \tag{5}$$

Case (1) $|f(z)|>1$ のとき，(5) 式の両辺の絶対値の対数をとると，

$$\log^+\left|\frac{P[f]}{f^{\overline{d}(P)}}\right|\leqq\sum_{j=1}^n\log^+|a_j(z)|+K\sum_{\ell=1}^m\log^+\left|\frac{f^{(\ell)}}{f}\right|+O(1). \tag{6}$$

ここで，m は $P[f]$ に現われる $f(z)$ の微分の階数の最大値とする．

Case (2) $|f(z)|\leqq 1$ のとき，Case (1) と同様に (5) 式より

$$\log^+\left|\frac{P[f]}{f^{\overline{d}(P)}}\right|\leqq\Big(\overline{d}(P)-\underline{d}(P)\Big)\log^+\left|\frac{1}{f}\right|+\sum_{j=1}^n\log^+|a_j(z)|+K\sum_{\ell=1}^m\log^+\left|\frac{f^{(\ell)}}{f}\right|+O(1). \tag{7}$$

(6)，(7) 式，及び，Lemma 1 より

$$m\left(r,\frac{P[f]}{f^{\overline{d}(P)}}\right)\leqq\Big(\overline{d}(P)-\underline{d}(P)\Big)m\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{j=1}^n m(r,a_j)+K\sum_{\ell=1}^m m\left(r,\frac{f^{(\ell)}}{f}\right)\leqq\Big(\overline{d}(P)-\underline{d}(P)\Big)m\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\,.$$

Q.E.D

Lemma 3. $f(z)$ は有理型函数で，$z=z_0$ において位数 p $(\geqq 1)$ の極を持つとし，$P[f]$ は f の微分多項式で，その係数は $z=z_0$ で解析的であるとする．このとき，$P[f]$ は $z=z_0$ に高々位数 $p\overline{d}(P)+\Gamma_P-\overline{d}(P)$ の極を持つ．

Proof. $P[f]$ を $a_j(z)f^{n_{0j}}(f')^{n_{1j}}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{n_{kj}}$ なる項の和であるとする．ただし，$a_j(z)$ は $z=z_0$ で解析的である．この項が $z=z_0$ に極を持つならば，その位数は高々

$$\max_{1\leqq j\leqq n}\left\{\sum_{s=0}^k(p+s)\,n_{sj}\right\}=\max_{1\leqq j\leqq n}\left\{(p-1)\sum_{s=0}^k n_{sj}+n_{0j}+2n_{1j}+\cdots+(k+1)n_{kj}\right\}$$

$$\leqq(p-1)\overline{d}(P)+\Gamma_P\leqq p\overline{d}(P)+\Gamma_P-\overline{d}(P).$$

Q.E.D

Lemma 4. $P[f]$ を $f(z)$ の非定数微分多項式とし，$f(z)$ を含まないものとする（つまり，$P[f]$ は f の導関数だけからなる微分多項式である）．$a_1, a_2, \dots, a_q$ を相異なる q 個の複素数とするとき，次が成立する：

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) \leqq T(r, P[f]) + S(r,f)\,.$$

Proof. $q \geqq 2$ と仮定する．

$$F(z) = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(f(z)-a_i)^{\overline{d}(P)}},$$

とし，$\delta = \min_{1\leqq i<j\leqq q} |a_i - a_j|$ とおく．

仮に，ν $(1 \leqq \nu \leqq q)$ が存在して，$|f(z)-a_\nu| < \dfrac{\delta}{3q}$ ならば，$\mu \neq \nu$ に対して，

$$|f(z)-a_\mu| \geqq |a_\mu - a_\nu| - |f(z)-a_\nu| \geqq \delta - \frac{\delta}{3q} = \frac{3q-1}{3q}\delta \geqq \frac{2}{3}\delta.$$

従って，

$$\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} \leqq \frac{3}{2\delta} \leqq \frac{1}{2q}\frac{1}{|f(z)-a_\nu|}.$$

ゆえに，三角不等式によって，

$$|F(z)| \geqq \frac{1}{|f(z)-a_\nu|^{\overline{d}(P)}} - \sum_{\mu\neq\nu} \frac{1}{|f(z)-a_\mu|^{\overline{d}(P)}} \geqq \frac{1}{|f(z)-a_\nu|^{\overline{d}(P)}}\left(1 - \frac{q-1}{(2q)^{\overline{d}(P)}}\right).$$

両辺の対数をとると，

$$\log^+|F(z)| \geqq \overline{d}(P)\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a_\nu}\right| + \log^+\left|1 - \frac{q-1}{(2q)^{\overline{d}(P)}}\right| - O(1).$$

$\mu \neq \nu$ については，$\left|\dfrac{1}{f(z)-a_\mu}\right| \leqq \dfrac{3}{2\delta}$ であったことに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\log^+|F(z)| &\geqq \overline{d}(P)\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a_\nu}\right| + \log^+\left|1 - \frac{q-1}{(2q)^{\overline{d}(P)}}\right| - O(1) \\
&\geqq \overline{d}(P)\sum_{i=1}^{q}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a_i}\right| + \log^+\left|1 - \frac{q-1}{(2q)^{\overline{d}(P)}}\right| - O(1) - \overline{d}(P)(q-1)\log^+\left|\frac{3}{2\delta}\right| \\
&\geqq \overline{d}(P)\sum_{i=1}^{q}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a_i}\right| + \log^+\left|1 - \frac{q-1}{(2q)^{\overline{d}(P)}}\right| - O(1) - \overline{d}(P)(q-1)\log^+\left|\frac{3}{2\delta}\right| - q\overline{d}(P)\log^+\left|\frac{3q}{\delta}\right|.
\end{aligned} \tag{8}$$

一方，全ての i に対して，$|f(z)-a_i| \geqq \dfrac{\delta}{3q}$ ならば，

$$\overline{d}(P)\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a_i}\right| \leqq \overline{d}(P)\log^+\left|\frac{3q}{\delta}\right|,$$

であることに注意すれば，(8) 式は全ての z に対して成立することがわかる．(8) 式を原点中心，半径 r の円周に沿って積分し，$2\pi i$ で割れば，

$$\begin{aligned}
\overline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) &\leqq m(r,F) + O(1) \leqq m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + m(r, P[f]\,F) + O(1) \\
&\leqq m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{P[f]}{(f-a_i)^{\overline{d}(P)}}\right) + O(1).
\end{aligned} \tag{9}$$

さて，各 i に対して $(f-a_i)^{(n)} = f^{(n)}$ であること，及び仮定によって $P[f]$ が f を含まないことから，$P[f] = P[f-a_i]$ が成り立つので，Lemma 2 を利用して，

$$\begin{aligned}
m\left(r, \frac{P[f]}{(f-a_i)^{\overline{d}(P)}}\right) &= m\left(r, \frac{P[f-a_i]}{(f-a_i)^{\overline{d}(P)}}\right) \leqq \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r, f-a_i) \\
&= \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r,f)\,.
\end{aligned}$$

こうして，(9) 式より，

$$\overline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leqq m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r,f)\,.$$

ゆえに，

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leqq m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + S(r,f)\,.$$

従って，第１主要定理を利用して，

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) \leqq m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + S(r,f) = T(r, P[f]) + S(r,f)\,.$$

Q.E.D

3. 定理の証明

定理１の証明　先ず，近接函数の定義及び，Lemma 2 より，

$$m(r, P\,[f]) \leqq m\left(r, \frac{P\,[f]}{f^{\overline{d}(P)}}\right) + m\left(r, f^{\overline{d}(P)}\right) \leqq \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{d}(P) m(r,f)\,. \tag{10}$$

次に，$P[f]$ の極の個数函数を調査する．$P[f]$ の極は，f の極であるか，極でないかのどちらかであるが，f の極でなければ，$P[f]$ の係数の極でなければならない．そこで，先ず函数 f が $z = z_0$ で位数 p の極を持つとする．このとき，さらに $z = z_0$ が $P[f]$ の全ての係数の正則点ならば，$P[f]$ の $z = z_0$ における極の位数は，Lemma 3 より，高々$p\overline{d}(P) + \Gamma_P - \overline{d}(P)$ である．他方，$z = z_0$ が $P[f]$ の少なくとも一つの係数の極ならば，仮定より，その個数函数は $T(r,f)$ に関して small であるから，

$$N(r, P\,[f]) \leqq \overline{d}(P) N(r,f) + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\overline{N}(r,f) + S(r,f)\,. \tag{11}$$

(10)，(11) 式を加え，第１主要定理を用いると，

$$\begin{aligned} T(r, P[f]) &\leqq \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{d}(P) m(r,f) + \overline{d}(P) N(r,f) + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\overline{N}(r,f) + S(r,f) \\ &= \overline{d}(P) T(r,f) + \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right)\left(T\left(r, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\overline{N}(r,f) + S(r,f) \\ &= \left(2\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) T(r,f) - \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\overline{N}(r,f) + S(r,f)\,. \end{aligned}$$

両辺を $T(r,f)$ で割って，上極限をとると，

$$\limsup_{r\to\infty, r\notin E} \frac{T(r, P[f])}{T(r,f)} \leqq 2\overline{d}(P) - \underline{d}(P) - \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right) \liminf_{r\to\infty, r\notin E} \frac{N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{T(r,f)} + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right) \limsup_{r\to\infty, \notin E} \frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}. \tag{12}$$

$\Theta(\infty, f)$，$\Delta(0, f)$ の定義より，

$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_{r\to\infty, r\notin E} \frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)} = 1 - \Theta(\infty, f)\,, \\ \displaystyle\liminf_{r\to\infty, r\notin E} \frac{N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{T(r,f)} = 1 - \Delta(0, f)\,, \end{cases}$$

であるから，(12) 式より，

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to\infty, \notin E} \frac{T(r, P\,[f])}{T(r,f)} &\leqq 2\overline{d}(P) - \underline{d}(P) - \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right)\left(1 - \Delta(0,f)\right) + \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\left(1 - \Theta(\infty, f)\right) \\ &= \Gamma_P + \left(\overline{d}(P) - \underline{d}(P)\right)\Delta(0,f) - \left(\Gamma_P - \overline{d}(P)\right)\Theta(\infty, f)\,. \end{aligned}$$

（証明終り）

定理 2 の証明　$P[f]$ は非定数微分多項式で $f(z)$ を含まないとする．値分布理論でよく知られているように，$\delta(a,f)>0$ となる複素数 a は高々可算個しかないので，$\{a_i\}$ を $\delta(a_i,f)>0$ となる相異なる複素数の列とする．このとき，Lemma 4 より

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)+N\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)\leqq T(r,P[f])+S(r,f)\,.$$

両辺に $m\left(r,\dfrac{1}{P[f]}\right)$ を加え，第 1 主要定理を用いると

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)\leqq m\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)+S(r,f)\,.$$

両辺を $T(r,f)$ で割って，下極限をとると，

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q}\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}\leqq\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{m(r,P[f])}{T(r,f)}\leqq\begin{cases}\displaystyle\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{m\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)}{T(r,P[f])}\cdot\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)},\\[2ex]\displaystyle\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{m\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)}{T(r,P[f])}\cdot\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}.\end{cases}\tag{13}$$

ここで，$\delta(0,P[f])$，$\Delta(0,P[f])$，$\delta(a_i,f)$ の定義より，

$$\delta(a_i,f)=\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)},\quad\delta(0,P[f])=\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)}{T(r,P[f])},\quad\Delta(0,P[f])=\limsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)}{T(r,P[f])},$$

に注意して，(13) 式より，

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q}\delta(a_i,f)\leqq\delta(0,P[f])\cdot\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)},\tag{14}$$

$$\underline{d}(P)\sum_{i=1}^{q}\delta(a_i,f)\leqq\Delta(0,P[f])\cdot\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}.\tag{15}$$

ここで，$q\to\infty$ とすると，(14)，(15) 式より，それぞれ，(2)，(3) 式を得る．

（証明終り）

系の証明　$\overline{d}(P)=\underline{d}(P)=n$ かつ $\Theta(\infty,f)=1$ なので，(1) 式より

$$\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}\leqq n.\tag{16}$$

他方，$\sum\delta(a,f)=1$，$\underline{d}(P)=n$ なので，(2) 式より

$$n\leqq\delta(0,P[f])\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}.\tag{17}$$

同様に，(3) 式より，

$$n\leqq\Delta(0,P[f])\liminf_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}.\tag{18}$$

(16)，(17) 式より，

$$n\leqq\delta(0,P[f])\limsup_{r\to\infty,r\notin E}\frac{T(r,P[f])}{T(r,f)}\leqq\delta(0,P[f])\cdot n.$$

一般に，$\delta(0,P[f])\leqq 1$ に注意して，結論を得る．同様に (16)，(18) 式を用いると，$\Delta(0,P[f])=1$ が示される．

（証明終り）

4.　参考文献

[1] H.S.Gopalakrishna and S.S.Bhoosnurmath: On the deficiencies of differential polynomials, J.Karnatak Univ.Sci.18, pp329-335, 1973

[2] W.K.Hayman: Meromorphic functions, Clarendon Press, London, 1964

[3] K. Ishizaki: Meromorphic Solutions of Complex Differential Equations, University of Chiba, 1993

[4] R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1936