

# 機械工学科関連科目とベクトル解析基礎との関わり

—計測制御教科および周辺専門分野を巡って—

## The Teaching Subjects of Mechanical Engineering Division and the Basic Vector Mathematics

— The Scope on Instrument and Control Course and Surrounding Industrial Science —

佐藤 哲男\*

Tetsuo SATO

### ABSTRACT

Our college (T.M.C.I.T.), Arakawa campus, has the Division of Mechanical Engineering, which involves the Instrument and Control Course. For the teaching subjects of the Division of Mechanical Engineering, especially the contents of the subjects in charge of the author, relevant to the Instrument and Control Course, are mainly brought in focus in conjunction with the basic vector mathematics in this paper. The central body of the paper has the matters as the follow: the mathematics of inner product, vector product, vector operators such as grad., div., and rot., and their applications to the surrounding industrial science, i.e., dynamic mechanics, electromagnetism, electrics, fluid mechanics, elastical vibrations. The most of descriptions of the fundamental equations for involved problems might be with the author's impressions based both on the career of the experience in study-teaching and the results of research-studies since his graduation.

**Key words:** Inner product, Vector product, Vector operator, Orthogonal function series expansion, Dynamics of rigid body, Gyroscopic moment, Coriolis force, Symmetric top, Angular momentum equation, N-th order vector state space equation, Eigen-value problem, Fluid mechanics, Fluidics, Navier-Stokes' equation, Maxwell's equation, Equation of plate vibration, Work.

## 1 結論

本校(航空高専)では1989(平成元)年度の学科改組と期を一にした機械工学科専門科目における一部選択制の採用(A, B, およびCのコース選択科目)を含む教育課程の全面的改編と、その後の学科「完成年度」すなわち1993(平成5)年度の教育課程(第4, 5学年課程)の部分的見直しが行なわれた。著者の担当する計測制御関連科目と、現行の数学をはじめとする基礎科目・周辺科目についての関連の資料として本校の所謂「シラバス」類がある(本校の「シラバス」は1994(平成6)年度から作成・使用され始めた)。現在に至るまで実施されている教授内容を振り返り、就中そのなかのベクトル解析と専門科目におけるその応用・適用についての関連性を見直してみると、本論の題目である「ベクトル解析基礎との関わり」の観点からの重要な課題・問題点があることが分かる。著者は現在計測制御教科の関連の科目「制御工学」、「制御工学特論」、「電気工学概論」、「センサー論」、「工学実験＝制御工学班」、「工学実験＝計測工学班」、「工学実験＝電気工学班」等の機械工学科各学年の授業を担当し、その授業のなかではベクトルと行列による数式記述、内積(Scalar product, Inner product)による表現、三次元空間における外積＝ベクトル積(Vector product, Cross product)による表現を使う等、内容的にベクトル算法、ベクトル解析の初歩的

知識が欠かせないものとなっている。たとえば長年にわたり著者の担当してきた「制御工学特論」(機械工学科5学年のCコース選択科目)における現代ベクトル制御論の講義では、 $n$ 次元空間のベクトル状態方程式に関して固有ベクトルに基づいた「ベクトル・マトリックス式」による制御系解析・設計を取り上げている。「センサー論」も機械工学科5学年のCコース選択科目の一つとして、これまでは前掲の「制御工学特論」と同様に年度後期開講科目に割り当てられていた。しかしその講義の内容、すなわち「回転こま」、「ジャイロスコープ」など「剛体の力学」に関連して、オイラー角、ベクトル積を取り上げるなど、「物理」、「応用物理」、「工業力学」、「機械力学」の各教科目と関連性がある故に、最上級学年(第5学年)における「センサー論」の講義内容とこれら関連科目の学習との開講時期的整合およびこの講義の受講によって大学進級(編入)準備のための学習に展望と見通しを与えることのために、今年度(2007(平成19)年度)からは機械工学科の方針として、この「センサー論」を前期期間に開講することとしてこれを実施している。

ベクトル積の概念による物理的関係の把握は、極めて直截的でそれらの空間的な事象のイメージング・理解のためにこれがおおいに役立ち、力学、電気、流体等の各専門分野において、空間におけるこの数学概念＝ベクトル積を始め、ベクトル解析の登場場面は決して少なくない。しかし本校においては、1989(平成元)年度の学科改組以降従来から、学校統合により新発足した今日の産業技術高専に

\* 産業技術高専 ものづくり工学科 ロボット工学コース(荒川キャンパス)  
兼 航空高専 機械工学科

至るまで実施されているカリキュラムの編成上からは、在籍している機械工学科所属学生はごく一部の学生（「応用数学特論」（5年前期自由選択科目）の受講者）を除いて数学のベクトル積の概念・知識を授けられず、ここ4～5年来の著者担当の一連の専門科目（「電気工学概論」、「センサー論」）の授業においてベクトル積に関する学習をするまで、所属の学生はその応用と適用の利便を享受できずに卒業していることは事実として銘記したい。関連の一般基礎科目としての「数学」（および「応用数学」）の各科目において現在実施されている授業で使用している教科書では、ベクトル積についての内容は全くない。また一般科目の物理（および応用物理）で使用している教科書「高専の応用物理」（第2版）（森北出版）における「力学」の「力のモーメント」および「電磁気学」の部分の各説明においてベクトル積による表現は全くされていない。他方これとは別の同一編集者・同日出版の教科書「高専の応用物理」（初版）（森北出版）（現在は絶版）では、「フレミングの左手の法則」および「フレミングの右手の法則」に関してベクトル積による表現がなされている。しかし本校の「物理」関連各科目ではこちらの教科書（初版）は発売当時から使用されていない。

一方、周辺専門分野の内容とベクトル解析との関連を概観してみると、ベクトル空間において定義されるベクトル演算子、すなわち勾配（Gradient, grad,  $\nabla$ ）、発散（Divergence, div,  $\nabla \cdot$ ）、回転（Rotation, Curl, rot,  $\nabla \times$ ）を用いた諸基礎方程式（微分形—あるいは積分形—の表示式）による物理法則・現象の記述は、たとえばマクスウェルの電磁方程式、流体に対するニュートンの運動の法則に基づいた（慣性—、および非慣性—座標系の）諸運動量方程式、圧縮性粘性流体の非定常ナビエ・ストークスの方程式（Navier - Stokes' equation）、前掲の「剛体の力学」でのジャイロスコープの運動の角運動量方程式、さらに連続体の平面板曲げ（撓み）振動を記述する重調和方程式等々と諸々挙げることが出来る。

本校機械工学科において教授する内容は、当該年度「シラバス」掲載の授業項目として記載されていて、受講生がその標準的レベルに到達出来るよう、担当教員が奮励してこれの維持に努めることは是非とも必須のことである。著者はこの面についての姿勢として従来から、担当する教科目の授業につき「シラバス」に則ってストイックな程度に集中的努力を注いでいる。この立場に立脚することにおいて、本論文で標準的レベルの延長線上に位する理工系大学院のレベル程度の工学的・科学的諸問題、専門的事項とベクトル解析との関わり等について意識的に触れ、考究・省察してこれの論議を展開することは、学生と教師との間の学問的学習についての好ましい対峙関係を維持し、それによる勉学意欲高揚を醸成・推進する上で意義があるのではないかと考えている。

## 2 内積一般とベクトル積

### 2.1 内積（1）平面内および三次元空間における内積

#### (1) 定義と内積の性質

平面において二つの単位基ベクトル  $\mathbf{i} = (1, 0)^T$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)^T$  によって表される二つの位置ベクトル、 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$  と  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$  に関して

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$ ,  
 $(\theta$  は、二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角) をベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積という。

三次元空間において同様に、二つのベクトル  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$  と  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$  についてその内積  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  は  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$  となる。 $(\theta$  は、前掲と同じく空間における二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角)。

内積について、つぎの性質がある。

・  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \neq 0$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$  とすれば  $\theta = \pm 90^\circ$  であり、二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は互いに直交 ( $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ) する。

・ 内積の演算において、交換法則、分配法則および結合法則が成立する。

(2) 複素（数）ベクトルの内積 虚数単位を  $j = \sqrt{-1}$  とし、二つの複素（数）ベクトル  $\dot{V}$  と  $\dot{I}$  を

$$\dot{V} = a + j b = V e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$\dot{I} = c + j d = I e^{j(\omega t + \beta)}$$

とするとき、この  $\dot{V}$  と  $\dot{I}$  の内積は

$$\langle \dot{V}, \dot{I} \rangle = |\dot{V}| |\dot{I}| \cos(\alpha - \beta) = V I \cos(\alpha - \beta) \\ = a[c + bjd]$$

である。

(3) 作用力のなす仕事 一定の作用力  $\mathbf{F}$  (N) が変位ベクトル  $\mathbf{r}$  (m) の距離の間作用を及ぼすとき、作用力  $\mathbf{F}$  のなす仕事  $W$  (J) は二つのベクトル  $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{r}$  の内積:

$$W = \langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos \theta$$

で与えられる。

この表示式における正の仕事と「負」の仕事についての考究：作用力のなす仕事は、変位  $\mathbf{r}$  の方向に対して力  $\mathbf{F}$  の方向を意味する角  $\theta$  が、 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$  であるとき  $W$  は正の値となり、力  $\mathbf{F}$  は仕事  $W$  をなす（与える）。一方  $\theta$  が  $\theta > 90^\circ$  あるいは  $\theta < -90^\circ$  のときには、反対に力  $\mathbf{F}$  を加える側は作用力を受ける側からの反作用によって  $|W|$  ( $W < 0$ ) だけの仕事を獲得する。謂わばこの場合、作用力は「負」の仕事をする事となる。

(4) エレクトロン・ボルト 電子（電荷  $e = -1.6021892 \times 10^{-19} \text{ (C)}$ ）が、空間の電界  $\mathbf{E}$  (A/m) の中の経路  $\Gamma$  を辿るときに獲得する仕事  $W$  (J)（電氣的エネルギー）は、内積  $\langle \mathbf{E}, d\mathbf{s} \rangle$  の経路（線）積分：

$$W(\text{J}) = - \int_{\Gamma} e \langle \mathbf{E}, d\mathbf{s} \rangle = -e \int_{\Gamma} V$$

で表わされ、この式の  $V$  をエレクトロン・ボルト (Electron volt)  $V$  (eV) という。1 (eV) は、電子の電荷  $e$  を持つ荷電粒子が 1 (V) で加速されるエネルギーである。

(5) 交流電流のなす仕事 電流実効値複素ベクトルを  $\dot{I}$  (A)、電圧実効値複素ベクトルを  $\dot{V}$  (V)、負荷インピーダンスを  $\dot{Z}$  ( $\Omega$ ) とすると、交流電流のなす仕事  $W$  (J) は

$$W = \langle \dot{V}, \dot{I} \rangle = \langle \dot{I} \dot{Z}, \dot{I} \rangle = |\dot{I}|^2 |\dot{Z}| \cos \phi$$

である。ここで  $I$  は実効値ベクトル  $\dot{I}$  の大きさである。力率角  $\phi$  は

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Re}[\dot{Z}]}{\sqrt{(\text{Re}[\dot{Z}])^2 + (\text{Im}[\dot{Z}])^2}} \right\}$$

である。

## (6) 交流発電機・同期電動機の「遅れ力率」と「進み力率」

(i) **交流発電機** 同期交流発電機の極数  $2p$  ( $p=1, 2$  など) の回転子 (界磁) の回転磁界 (回転速度  $n_0$  (rps) の磁束により、固定子 (電機子) 巻線に周波数  $f = p \times n_0$  (Hz) の誘導電圧  $e_a$  を発生する。発電機から負荷電流  $\dot{I}$  が流れるとき、端子電圧  $\dot{V}$  (1 相当あたり) は、同期インピーダンス  $\dot{Z}_s$  ( $\Omega$ ) の電圧降下により

$$\dot{V} = \dot{E} - \dot{Z}_s \dot{I}, \quad \dot{Z}_s = r_s + jx_s, \quad r_s/x_s \ll 1$$

となる。負荷回路の力率  $\cos \phi$  を考えると、発電出力 (1 相当あたり) は内積  $\langle \dot{V}, \dot{I} \rangle = VI \cos \phi$  となる。 $\dot{E}$  と  $\dot{V}$  との相差角を  $\delta$  (これを負荷角と呼ぶ) とすると、 $\dot{Z}_s$  の抵抗分  $r_s$  ( $\Omega$ ) がリアクタンス分  $x_s$  ( $\Omega$ ) に比べて無視できるから図 1 のベクトル図の関係から  $E \sin \delta = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_s} \right| I \cos \phi$  となり、発電機の 1 相当あたりの出力は

$$\langle \dot{V}, \dot{I} \rangle = VI \cos \phi = V \left[ \frac{E}{\dot{Z}_s} \right] \sin \delta$$

となり、Y 結線 3 相発電機の発電出力  $P$  (W) は、これの 3 倍となる。外部特性 (V-I 特性、すなわち界磁電流  $I_f$  および負荷力率  $\cos \phi$  を一定にしたときの、負荷電流  $\dot{I}$  に対する端子電圧  $\dot{V}$  の関係) は  $r_s \dot{I}$  を無視すると

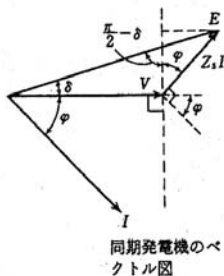


図 1 同期交流発電機

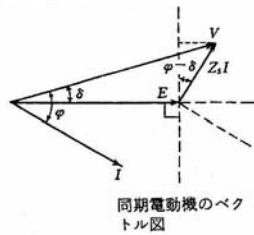


図 2 同期電動機

$$\begin{cases} V \cos \phi = E \cos (\delta + \phi) \\ V \sin \phi + Z_s I = E \sin (\delta + \phi) \end{cases}$$

である。ここで  $V, E, I$  および  $Z_s$  は、いずれも  $\dot{V}, \dot{E}, \dot{I}$  および  $\dot{Z}_s$  の大きさを表わす。これら二式から

$$V = -Z_s I \sin \phi + \sqrt{E^2 - Z_s^2 I^2 \cos^2 \phi}$$

を得る。したがって V-I 特性は、 $\phi > 0$  すなわち負荷が遅れ力率の場合は I の増加に対し V は単調減少、 $\phi < 0$  すなわち負荷が進み力率の場合は I の増加に対し V も増加して  $-E \tan \phi / Z_s$  で頂点に達し、以降減少する。発電機出力  $P$  (W) は前記のとうりであり、負荷角  $\delta$  が小さい範囲ではほぼ  $\delta$  に比例する。P の最大値は  $3VE / Z_s$  となる。発電機は  $0 < \delta < 90^\circ$  で運転される。負荷角  $\delta > 90^\circ$  の範囲の運転は P- $\delta$  の関係から不安定な状態となる。

(ii) **同期電動機** 同期電動機の構造は、基本的には同期交流発電機と同じである。同期電動機の固定 (電機子) 巻線によって同期速度に等しい回転速度の回転磁界を発生し、一方回転子はこの間に回転子磁極 (極数  $2p=2$ ) の負荷ずれ角  $\delta$  に応じた回転トルク  $\tau$  (Nm)  $= 2RF_m \sin \delta$  ( $R$  (m) は磁極の有効半径、 $F_m$  (N) は回転磁力) を受けて同期速度で回転する。この同

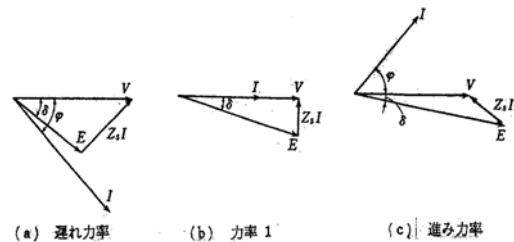


図 3 同期電動機の力率

期回転に伴い固定電機子巻線には、端子電圧  $\dot{V}$  (V) に加えて発電機の場合と同様に誘導起電力  $\dot{E} = \dot{V} - \dot{Z}_s \dot{I}$  が発生する。この式の両辺について電流  $\dot{I}$  (A) との内積を作ると、 $\langle \dot{E}, \dot{I} \rangle = \langle \dot{V}, \dot{I} \rangle - \langle \dot{Z}_s \dot{I}, \dot{I} \rangle$  が得られる。上式の右辺第一項は電機子回路への入力有効電力、第二項は電機子回路の損失であるから、左辺の  $\langle \dot{E}, \dot{I} \rangle$  が機械動力に変換される電力である。 $\dot{Z}_s$  のうちの抵抗分  $r_s$  ( $\Omega$ ) はリアクタンス分  $x_s$  ( $\Omega$ ) に比べて無視できるので、図 2 のベクトル図の関係から

$$\langle \dot{E}, \dot{I} \rangle = EI \cos (\phi - \delta) = EV \sin \delta / \left| \dot{Z}_s \right| \dots \dots (1)$$

となる。Y 結線三相同期電動機の機械動力への変換電力  $P_m$  (W) はこれの 3 倍であり、実際の出力は  $P_m$  から鉄損と機械損を差し引いたものになる。端子電圧  $\dot{V}$  (V) および界磁電流  $I_f$  (A) を一定にして負荷を増加させると、負荷ずれ角  $\delta$  が大きくなり  $\delta = 60^\circ \sim 70^\circ$  を超えるともはや安定運転が不可能になる (同期はずれ)。同期電動機は効率がよく (効率 90% 以上)、定速度運転が可能なので低速度・大容量のセメントキルン、各種の圧縮機、送風機などに使用される。

端子電圧  $\dot{V}$  (V) および出力  $P_m$  (W) を一定に保ちながら、回転子界磁電流  $I_f$  (A) を変化させると、 $\dot{Z}_s$  はほぼ一定なので、式 (1) から  $E$  が増加/減少した分だけ

$\sin \delta$  が逆に減少/増加する。これに伴い  $\dot{I}$  と  $\dot{V}$  の間の力率角  $\phi$  が図 3 のベクトル図に示すように正 (遅れ力率) から負 (進み力率) まで大きく変化する。このように界磁電流  $I_f$  の調整で力率  $\cos \phi$  を加減することができるので、無負荷同期電動機を送電系統に接続し、力率改善のための同期調相機として使用される。

## 2.2 内積 (2) n 次元および無限次元ベクトル空間の内積

### (1) 定義

n 次元ユークリッド空間  $R^n$  のベクトル、

$$\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \text{ および } \mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$$

についての内積は、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の対応する各成分の積の和であり、これを記号  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  で表わす。すなわち

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n$$

である。さらに無限次元ベクトル空間  $R^\infty$  における内積は、つぎのように定義される。

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_i \eta_i + \dots$$

### (2) シュミットの正規直交化

内積空間  $X$  において  $\{\mathbf{x}_i\}$  が有限個または可算個の一次独立なベクトルであれば、いかなる  $n$  に対しても

$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  となるような正規直交系  $\{\mathbf{e}_i\}$  をつくることができる。ただし  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  は、

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  で張られる  $n$  次元の部分空間を表わす。

【証明】まず  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 / |\mathbf{x}_1|$  とおく。つぎに

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$  とおけば  $\mathbf{y}_2 \perp \mathbf{e}_1$  となる。そこで

$\mathbf{e}_2 = \mathbf{y}_2 / |\mathbf{y}_2|$  とおこう。この操作を繰り返して

$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k / |\mathbf{y}_k|$ , ( $k=3, \dots, n$ )

とすればよい。(証明終り)

本論文ではベクトル  $\mathbf{x}_i$  の距離とノルムの双方を記号上で同等しくして、 $|\mathbf{x}_i|$  により表わす。なお逐次得られる上の直交系はコンパクト集合<sup>†</sup>をなす。

### 2.3 内積 (3) 連続関数, 複素ベクトルおよび複素連続関数の内積

#### (i) 定義

閉区間  $[0, 1]$  で定義された二つの関数  $f(t), g(t) \in L^2$  が、それぞれ二乗積分が有限値であるとして、これら連続関数  $f(t)$  と  $g(t)$  について、内積  $\langle f, g \rangle$  は

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad |f| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \dots\dots(2)$$

と定義される。

つぎに複素ベクトル空間  $C^n$  ( $n$  次元),  $C^\infty$  (無限次元) および  $L^2$  (複素関数の全体) における内積は、それぞれつぎのように定義される。

$n$  次元複素ベクトル  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  と  $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  について、内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  は

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\xi}_1 \eta_1 + \bar{\xi}_2 \eta_2 + \dots + \bar{\xi}_n \eta_n \quad \dots\dots(3)$$

ただし  $\bar{\xi}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) は、 $\xi_i$  の共役複素数である。

無限次元複素ベクトル  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)^T$  と  $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots)^T$  について、内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  は

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\xi}_1 \eta_1 + \bar{\xi}_2 \eta_2 + \dots + \bar{\xi}_i \eta_i + \dots \quad \dots\dots(4)$$

である。

$L^2$  における複素関数  $f(t)$  と  $g(t)$  について、それぞれ絶対値の二乗積分が有限値であるとして、その内積  $\langle f, g \rangle$  はつぎのように定義される：

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad |f| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \dots\dots(5)$$

#### (ii) 性質

上掲の式 (2) ~ (5) のそれぞれに定義された各内積に関して、共通してつぎのような性質がある。

・  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  または  $\langle f, g \rangle = 0$  であるとき、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  または  $f$  と  $g$  は互いに垂直あるいは直交するという。

$$\cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\cdot \begin{cases} \langle \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \overline{\alpha_1} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \overline{\alpha_2} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle, \\ \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \overline{\alpha_1} \langle f_1, g \rangle + \overline{\alpha_2} \langle f_2, g \rangle \end{cases}$$

<sup>†</sup>  $A$  を距離空間  $X$  の部分集合とする。  $A$  内の任意の点列が  $A$  の点に収束する部分列を含むとき、 $A$  はコンパクト集合であるという。

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|, \quad \langle f, g \rangle \leq |f| |g|$$

(コーシー・シュワルツの不等式)

#### (iii) ヒルベルト空間

複素数の関数の全体を表わす集合

$$L^2 = \left\{ f(t); \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

において、すべてのコーシー列  $f_n(t)$  には、 $L^2$  に属する極限  $f(t)$  が存在する (すなわち完備)。複素関数形の内積、すなわち式(5) について完備な線形ベクトル空間をヒルベルト空間という。

### 2.4 ベクトル積 (外積)

#### 2.4.1 定義と性質

三次元ユークリッド空間  $R^3$  の直交 (右手) 座標  $(x, y, z)$  系 (各単位基ベクトルは、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  および  $\mathbf{k}$ ) の二つの位置ベクトル  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ ,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$  に関して、ベクトル積  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  を

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \sin \theta \mathbf{e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

と定義する。ただし  $\theta$  は二つのベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  のなす角、 $\mathbf{e}$  はベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  の双方の作る平面に垂直な方向の単位基ベクトルである。すなわちベクトル積  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  は、大きさがベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  の作る面積  $|\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \sin \theta$  に等しく、単位基ベクトル  $\mathbf{e}$  の方向を有するベクトルである。

・  $|\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \neq 0$ ,  $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$  のとき  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  であり、二つのベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  は互いに平行 ( $\mathbf{p} // \mathbf{q}$ ) となる。

・  $\frac{p_x}{q_x} = \frac{p_y}{q_y} = \frac{p_z}{q_z}$  のとき二つのベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  は互いに

直交 ( $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ ) する。

$$\cdot \mathbf{q} \times \mathbf{p} = -\mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

・ ベクトル積の演算について、分配法則が成立する。

#### 2.4.2 剛体の力学におけるベクトル積

##### (1) 力のモーメント

空間の直交  $(x, y, z)$  (右

手) 座標系 (各単位基ベクトルは、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  および  $\mathbf{k}$ ) における剛体の一点  $P$  (位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ) に力  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  が作用するとき、原点  $O$  のまわりの力のモーメント  $\mathbf{N}$  (Nm) は、 $\mathbf{r}$  (m) と  $\mathbf{F}$  (N) のベクトル積  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  で与えられる。

【注意】これは剛体の力学における力のモーメントの定義であるが、弾性学、材料力学における慣習的な定義では、力のモーメントの一種である梁や板の曲げモーメントの正負の向きは、正の曲げ撓み (負の曲率を有す) の生じる面 (正の法ベクトル面) に正の歪 (引っ張り歪) の生ずる曲げモーメントを正としているので、これをベクトル積として考えると上の力のモーメントの式の正負のとり方とは、正負符号が異なる。

【例題】一点  $P$  の位置ベクトルが  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \sqrt{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$  であり、この点  $P$  に力  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = 0\mathbf{i}$

+3j+0k が作用する。この場合の原点Oのまわりの力のモーメント **N** は、ベクトル積の計算を行なえば

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\sqrt{2} \mathbf{i} + 3\sqrt{2} \mathbf{k}$$

と得られる。

(2) 剛体の線速度と角速度ベクトルの関係

空間において剛体が座標原点Oに関して角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  (rad/s) で運動しているとき、剛体の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  (m) の点Pの線速度ベクトル  $\mathbf{v}$  は、図4に示す  $\mathbf{r}$  と  $\boldsymbol{\omega}$  との相互関係から  $\boldsymbol{\omega}$  と  $\mathbf{r}$  のベクトル積：

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

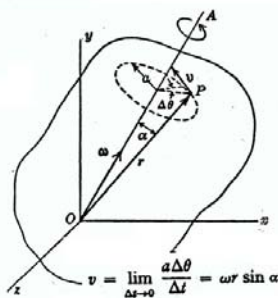


図4 線速度ベクトル

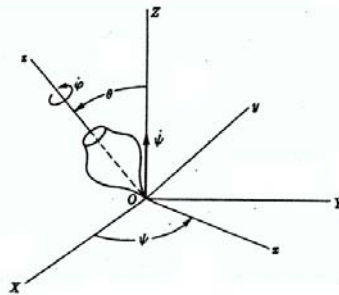


図5 対称こま

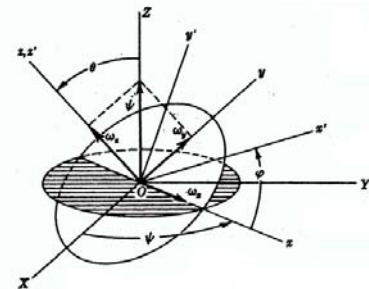


図6 Euler角 (θ, φ, ψ)

(4) ジャイロ・モーメント 図5のように 固定点Oを中心に回転軸によって自由に回転運動する対称こま(慣性モーメント  $I_x = I_y = I$  および  $I_z$ ) に生じる二つのジャイロ・モーメント (Gyroscopic moment) を導く。

こまの固定点Oのまわりの運動はつぎのような一般化ベクトル方程式 (角運動量方程式=Eulerの運動方程式) として表わせる：

$$\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで三次元ベクトル  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$  は、それぞれ対称こまに対する回転座標 x, y および z 各方向の作用モーメント、原点Oのまわりの角運動量ベクトルである。

Euler角 (θ, φ, ψ) を定義して (図6参照), 上式 (6) の角運動量方程式 (Eulerの運動方程式) を書けば

$$\begin{cases} M_x = I(\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z) + I_z \omega_y (\omega_z + \dot{\phi}) \\ M_y = I(\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) - I_z \omega_x (\omega_z + \dot{\phi}) \\ M_z = I_z (\dot{\omega}_z + \dot{\phi}) \end{cases} \quad \dots(7)$$

となる。上式へ Euler角表現の角速度成分を代入すれば

$$\begin{cases} M_x = I(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta) + I_z \dot{\psi} \sin\theta (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \\ M_y = I(\dot{\psi} \sin\theta + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta) - I_z \dot{\theta} (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \\ M_z = I_z (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta) \end{cases} \quad \dots(8)$$

となる。式 (7) 中の2項  $I_z \omega_y \dot{\phi}$ ,  $-I_z \omega_x \dot{\phi}$  は、物体の

で与えられる。

(3) 運動する剛体の角運動量ベクトル 空間において角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  (rad/s) で運動している剛体Vの座標原点Oのまわりの角運動量ベクトル  $\mathbf{H}$  ( $\text{kgm}^2/\text{s}$ ) は、つぎの積分：

$$\mathbf{H} = \int_V \rho [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dV$$

で与えられる。ここで  $\rho = \rho(x, y, z)$  は密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) であり、上の積分  $\mathbf{H}$  は剛体の要素運動量ベクトル (すなわち  $\rho dV$  と線速度ベクトル  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  との積) の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  によるモーメント (すなわちベクトル積) の全質量部Vについての体積積分である。

回転軸のスピンの  $\dot{\phi}$  に起因するジャイロ・モーメントである。これらをベクトル積表示すれば、それぞれ

$$I_z \dot{\psi} \times \dot{\phi}, -I_z \dot{\theta} \times \dot{\phi}$$

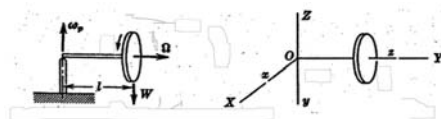
【例題】図7のような鉛直棒先端を中心としてスピン回転  $\Omega$  (左回転=C.C.W.) をするこまの水平面内の振り回り運動を考え、この定常振り回り速度  $\omega_p$  を求める。

式 (8) の第一式において、 $\theta=90^\circ, \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0; \dot{\psi}=\omega_p; \dot{\phi}=\Omega; I_z=I$  および  $M_x = -Wl$  (重力によるモーメント)；また同第二、第三式において  $M_y = M_z = 0$  である。したがって上のジャイロ・モーメントの式により

$$-Wl = I \omega_p \Omega \quad \therefore \omega_p = -\frac{Wl}{I \Omega}$$

となる。結局こまの水平面内運動を上方から見て、時計回り (C.W.) に振り回り速度  $\omega_p$  で歳差運動 (Precession) をする。このことは著者の教室授業「センサー論」のなかでの実験観察によって確かめられている。

(5) コリオリの力 固定座標系 (基ベクトルを  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  とする) において、空間の点を位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}'$  で表わす。座標原点Oを共有してこの固定点Oで相対的に  $\boldsymbol{\omega}$  の角速度で回転する相対座標系 (基ベクトルを  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とする) にある質点  $m$  (kg) が



(a) 水平面内運動 (b) 座標

図7 こまの振り回り

運動によって受ける力  $\mathbf{F}$  を考える.  $\mathbf{R}$  を固定座標系から見た相対座標系原点  $O$  の位置を表わすベクトル,  $\boldsymbol{\rho}$  を相対座標系における質点  $m$  の相対位置ベクトルとする.

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  は:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}} \\ &= \dot{\mathbf{R}} + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.\end{aligned}$$

加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}}$  は:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\mathbf{R}} + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \\ &\quad + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \\ &= \ddot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_r.\end{aligned}$$

したがって, 質点が受ける物体力  $\mathbf{F}$  は

$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + m\ddot{\boldsymbol{\rho}}_r + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_r$  となる. 上式で表される物体力のなかの項  $2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_r$  を質点の相対運動のコリオリの力 (Coriolis force) という. このコリオリの力は, 相対座標の角速度  $\boldsymbol{\omega}$  と質点相対速度  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_r$  のベクトル積に比例し, これら双方のベクトルに直交する方向を有する.

### 3 応用科学とベクトル数学

#### 3.1 電磁気学におけるベクトル積表現

(1) フレミングの左手の法則 長さ  $l$  (m) の導体の電流が  $\mathbf{I}$  (A) であり, その空間における磁束密度が  $\mathbf{B}$  (Wb/m<sup>2</sup>) であるとき, この導体につぎのような電磁力  $\mathbf{F}$  (N) が作用する:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} l \times \mathbf{B}$$

この電磁力の作用する方向は, 電流, 磁束密度の方向を左手の中指, 人差し指に割り当てるとき, 左手の親指の方向になる.

(2) アンペールの法則 空間における電流  $I_k$  (A) を取り囲む経路  $C$  の磁界の強さ  $\mathbf{H}$  (A/m) と経路  $C$  の微小線要素ベクトル  $d\mathbf{s}$  (m) との内積  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$  の一周経路  $C$  についての閉じた経路 (線) 積分は, 経路  $C$  内の電流  $I_k$  の総和に等しい. これをアンペールの法則 (Ampere's law) と呼び,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_k I_k$$

と表わされる. 上式の右辺, すなわち電流  $I_k$  の総和は起磁力 (Magneto-motive force, mmf) と呼ばれる.

(3) 電磁誘導起電力に関するフレミングの右手の法則 磁束密度が  $\mathbf{B}$  (Wb/m<sup>2</sup>) である空間において, 長さ  $l$  (m) の導体の運動速度が  $\mathbf{v}$  (m/s) であるとき, この導体につぎのような誘導起電力  $\mathbf{V}$  (V) が発生する:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} l \times \mathbf{B}$$

この誘導起電力の発生する方向は, 運動速度, 磁束密度の方向を右手の親指, 人差し指に割り当てるとき, 右手の中指の方向になる.

(4) ローレンツ力 空間において電荷  $q$  (C) が, 電界  $\mathbf{E}$  (V/m) および磁界  $\mathbf{B}$  (Wb/m<sup>2</sup>) のもとで速度  $\mathbf{v}$  (m/s) で運動するときに受けるローレンツ力 (Lorentz force)  $\mathbf{F}$  (N) は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

である.

(5) ホール電圧 ホール効果 (Hall effect) による発生ホール電圧  $\mathbf{V}$  (V) は, 磁束密度  $\mathbf{B}$  (Wb/m<sup>2</sup>) のもとで制御電流  $\mathbf{I}$  (A) が作用するとき

$$\mathbf{V} = k\mathbf{I} \times \mathbf{B}, \quad k = K_H/d$$

となる. ここで係数  $k$  はホール積感度  $K_H$  (Vm/AT) とホール素子の厚さ  $d$  (m) との比によって定まる.

(6) 磁気モーメント 一对の磁荷  $+q_m$  (Wb) と  $-q_m$  (Wb) からなる磁気双極子の要素長さが  $l$  (m) であるとき, 磁気モーメント (Magnetic moment)  $\mathbf{m}$  (Wb m) は,

$$\mathbf{m} = q_m \mathbf{l}$$

である. ここでベクトル  $\mathbf{l}$  は大きさが  $l$  で,  $-q_m$  から  $+q_m$  へ向かう方向を有する.

磁気モーメント  $\mathbf{m}$  に磁界  $\mathbf{H}$  (A/m) が作用するときの力のモーメント  $\mathbf{N}$  (Nm) は, ベクトル積により

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$$

と表わせる.

#### (7) マックスウェルの電磁方程式

• 電荷密度 (C/m<sup>3</sup>)  $\rho = \rho(x, y, z, t)$

• 電流密度 (A/m<sup>2</sup>)  $\mathbf{i} = (i_x, i_y, i_z)^T$

$$i_x = i_x(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$ ,  $\sigma$  ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ) は媒質物質の電気伝導率.

• 電束密度 (C/m<sup>2</sup>)  $\mathbf{D} = (D_x, D_y, D_z)^T$

$$D_x = D_x(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854 \times 10^{-12}$  (F/m) は真空中の誘電率,  $c$  は真空中の光の速度  $c = 3 \times 10^8$  (m/s).

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)^T = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

は分極ベクトル (真空中では  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ),  $\chi_e$  (F/m) は電気感受率.

• 電束電流 (変位電流) (A/m<sup>2</sup>)  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

• 電界の強さ (V/m)  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$

$$E_x = E_x(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

• 磁界の強さ (A/m)  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T$

$$H_x = H_x(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

• 磁束密度 (Wb/m<sup>2</sup>)  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$

$$B_x = B_x(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  (H/m) は真空中の透磁率.

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$$

は磁化の強さ (単位体積当りの磁気モーメント) (真空中では  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ),  $\chi_m$  (—) は磁気感受率.

• マックスウェルの方程式 (Maxwell's equation) は:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{D} = \rho, \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \dots\dots(9)$$

マックスウェルの電磁方程式の帰結として、電界と磁界が互いに直交する、すなわち  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$  という結論を得る。また  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}$  をポインティング・ベクトルという。これは平面電磁波について、進行方向に垂直な単位面積を通過する電磁エネルギーを表わす。

**3.2 状態空間法におけるシステム状態方程式** (ベクトルと行列による数式記述)

n次元 (バナッハ) 空間において、線形状態方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \dots\dots(10)$$

を考える。この状態方程式の n 次元状態変数ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  について、固有値問題

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \lambda\mathbf{x}(t) \dots\dots\dots(11)$$

を作ると、その解すなわち n 次元状態空間における固有値  $\lambda_i$  および固有ベクトル  $\mathbf{x}_i$  が存在すれば、それらはずきの必要十分条件式

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \dots\dots\dots(12)$$

から導かれる。この必要十分条件式は、つぎのような論理学的対偶命題に由来するものである：式 (11) は

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \lambda\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \end{cases}$$

と変形できる。これについて、いま

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0$$

であると、 $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  なる自明の解が得られる。これの対偶命題は恒に真であるから、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  なる有意解(Non-trivial solution) が存在するための必要十分条件は  $\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$  であると結論づけられる。

本題の固有値  $\lambda_i$  および固有ベクトル  $\mathbf{x}_i$  の組は、縮退 (Degeneration) の有無の如何の問題はあるが基本的に固有値問題の原式 (11) と上式 (特性方程式) (12) とによって決定される。

固有値問題の解法の一つとしてユニークな手法である “Deflated Matrix Method” のアルゴリズムによる n 次元固有ベクトル、固有値計算のコンピューター・プログラムが著者により作成されている。

**3.3 計測制御と流体の力学**

**3.3.1 計測制御と流体の力学 (1)** 計測制御における媒質流体 (古典的に空気、水、石油類;最近におけるプラズマ・ガス) に関して、工学的・科学的にそれらの挙動を支配する式をたてるには、以下のごとき流体・熱工学的事項を考慮しなければならない。

- ・粘性効果
- ・圧縮性を有する媒質流体について

体積弾性率 (N/m<sup>2</sup>)  $K = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$

圧縮率 (m<sup>2</sup>/N)  $\beta = 1 / K$  (逆数)

- ・熱力学的断熱変化 (等エントロピー変化) あるいはポリトロプ変化
- ・ニュートンの熱伝達の法則
- ・伝熱・対流・輻射現象
- ・ガス拡散

**3.3.2 流体の力学の相似の法則 (無次元数)**

航空機・船舶や諸装置の性能・設計の資料を科学的模型実験に基づいて取得する目的で、流体の動力学的挙動における相似の法則の関係保持のために下記の (1) から (5) の各無次元数のいくつかを計算に導入し、検討することができる。

圧力 (Pa)	p
長さ (m)	L
粘性係数 (Pa・s)	$\mu$
表面張力 (N/m)	$\sigma$
音速 (媒質) (m/s)	c
重力の加速度 (m/s <sup>2</sup> )	g
密度 (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$
速度 (m/s)	V

(1) Raynolds 数 (慣性力/粘性摩擦力)

$$\frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

(2) Froude 数 (慣性力/重力)

$$\frac{\rho V^2 / L}{\gamma} = \frac{V^2}{Lg}$$

(3) Mach 数 (慣性力/圧縮の力の平方根)

$$\sqrt{\frac{\rho V^2 / L}{\rho c^2 / L}} = \frac{V}{c}$$

(4) Weber 数 (慣性力/表面張力)

$$\frac{\rho V^2 / L}{\sigma L^2} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

(5) Euler 数 (2×圧力/慣性力)

$$\frac{p}{(\rho V^2 / 2)}$$

**3.3.3 計測制御と流体の力学 (2)**

(1) オリフィス式流量計測 流量計測等における様々なオリフィス孔の流れに関する絞り形状係数 (理論, 実験式)

(2) ノズル・フラッパー ノズル・フラッパーは、制御要素や各種計測機器の検出部における機械的に微小な変位、すきま量を極めて高い感度で作動流体の圧力変化として変換検知するために広く使われている。ノズル・フラッパーの基本的な方式である空気を作動流体とする場合の挙動は、流体のもつ圧縮性 (体積弾性率)、熱力学的断熱変化を考慮したベルヌーイの定理 (Bernoulli's theorem) に基づいて計算できる。

(3) 純流体素子 (Fluidics) の流体の力学 純流体素子は、機械的可動部を有しないで作動流体が制御流によって流れ方を制御され、その機能から増幅動作をするアナログ素子と論理動作・メモリー動作をするデジタル素子とに類別される。いずれも流体制御要素としての応用があり、このなかで作動流体 (空気、水、油、燃料

等)の流路における側壁附着効果 (Coanda effect) の原理に基づくものに関しては、この現象を発見した Henri Coanda (ルーマニア人技術者) が1920年代から30年代はじめにかけて、航空機および関連技術分野における応用のための多くの研究を行なったと言われている。

純流体素子の構造・形状の諸設計のためには、下記のナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes' equation) に基づく流体解析の必要がある。

(4) ナビエ・ストークス方程式 (ベクトル演算子による表示) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, & \dots(13) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) = 0. \end{cases}$$

ただし  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  は速度ベクトル、 $p(x, y, z, t)$  は圧力で密度  $\rho(x, y, z, t)$  の関数、 $\mu$  は流体の粘性係数である。媒質流体として空気を考えると、上式 (13) において重力による物体力は無視した。さらに粘性の影響を無視できれば ( $\mu = 0$ )、上式第一式において右辺は  $\mathbf{0}$  となり方程式はさらに簡単になる。第二式は、等エントロピー変化あるいはポリトロップ変化を表わす  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  と  $p(x, y, z, t)$  との関係についての方程式である。

(5) ストークス (Stokes) の定理 (3次元流れについて)

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad \dots(14)$$

すなわち任意の閉曲線  $C$  に対する速度の場の循環 (Circulation) であるところの一周線積分は、 $C$  なる境界線を持つ任意の曲面  $A$  についての速度の場の回転 (Rotation) (うず度, Vorticity) の  $A$  に垂直である方向成分の積分であるところの面積分に相等しい。

### 3.4 $L^2$ 連続関数の直交関数級数展開について

#### 3.4.1 二次元弾性連続体の固有値問題

二次元空間領域  $D$  において、与えられた関数  $w \in L^2$  に作用する線形同次偏微分演算子  $L$  および  $M$  を

$$L = A_1 + A_2 \frac{\partial}{\partial x} + A_3 \frac{\partial}{\partial y} + A_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_5 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dots,$$

$$M = C_1 + C_2 \frac{\partial}{\partial x} + C_3 \frac{\partial}{\partial y} + \dots$$

とする。ここで係数  $A_1, A_2$  などは  $x, y$  の関数、 $C_1$  は弾性連続体の質量分布を表わす  $x, y$  の関数であり、また  $C_2 = C_3 = \dots = 0$  である。領域  $D$  の境界  $\Gamma$  における  $w$  に関する線形同次偏微分演算子を  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) とし、弾性連続体の曲げ振動の変位分布  $w$  の式および  $w$  が満たすべき境界条件式を合わせた連立方程式からなる固有値問題は、 $\lambda$  を固有値としてつぎのようになる。

$$\begin{cases} L[w] = \lambda M[w], \\ B_i[w] = 0, \quad (i=1, 2, \dots, l) \end{cases} \quad \dots(15)$$

演算子  $L$  および  $M$  はともに (問題=弾性体の振動の基礎式のため) 自己随伴演算子であり、境界条件 (上の第二式) に固有値  $\lambda$  を含まないこの同次固有値問題の解 (固有モード) は、可付番無限個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  およびこれに対応した固有関数  $W_1, W_2, \dots$  となる。系

の  $L$  と  $M$  とが共に正定であれば (問題=弾性体であり、上掲のように多くの場合  $M$  は質量分布であり空間座標の関数となっていて、この正定は明らか) すべての固有値は正数となる。

固有値  $\lambda_r$  と固有関数  $W_r$  の  $r$  次固有モードについて  $L[W_r] = \lambda_r M[W_r]$ , ( $r=1, 2, \dots$ )  $\dots(16)$

が成り立つ。

いま  $\lambda_r, \lambda_s$  を相異なる固有値とし、 $W_r, W_s$  をこれに対応する固有関数とすると、系の自己随伴性によりつぎのような正規直交関係が成り立つ：

$$\begin{cases} \int_D W_r L[W_s] dD = \langle W_r, L[W_s] \rangle = 0, \quad (r \neq s), \\ \int_D W_r M[W_s] dD = \langle W_r, M[W_s] \rangle = \delta_{rs} \end{cases} \quad \dots(17)$$

ここで式中の  $\langle \square, \square \rangle$  は二つの二次元連続関数の内積である。記号  $\delta_{rs}$  はクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) であり、 $r \neq s$  のとき0であり  $r = s$  のとき1である。したがって二次元固有関数  $W_r$  ( $r=1, 2, \dots$ ) は、正規直交関数系を構成している。

#### 3.4.2 連続系の直交関数展開定理

境界条件  $B_i[w] = 0$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) を満たし、 $L[w]$  が連続である関数  $w \in L^2$  は、固有関数  $W_r$  の絶対一様収束する無限級数：

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} c_r W_r \quad \dots(18)$$

により表わせる。ここで展開係数  $c_r$  は

$$c_r = \lambda_r \int_D w M[W_r] dD = \lambda_r \langle w, M[W_r] \rangle, \quad (r=1, 2, \dots) \quad \dots(19)$$

で与えられる。これは連続系の直交関数展開定理であり、係数  $c_r$  は有限項級数展開近似における最小二乗誤差近似式を与える係数でもあって、その係数は近似級数の打ち切り項数の如何にはよらず最小二乗誤差を与える。

【証明】式 (18) の両辺に演算子  $L$  を作用させ、 $W_r$  との内積を作れば、

$$\langle L[w], W_r \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} c_s \langle L[W_s], W_r \rangle = c_r$$

となり、上式左辺について演算子  $L$  の自己随伴性 (随伴演算子  $L^* = L$ ) を考慮して変形すれば

$$\langle L[w], W_r \rangle = \langle w, L^*[W_r] \rangle = \langle w, L[W_r] \rangle$$

であるから、固有関数についての式 (16) の関係を使い  $c_r$  は結局つぎのようになる：

$$c_r = \lambda_r \langle w, M[W_r] \rangle = \lambda_r \int_D w M[W_r] dD, \quad (r=1, 2, \dots) \quad (\text{証明終り})$$

ここに掲げた二次元空間領域  $D$  の連続弾性体についての固有値問題および固有モードによる級数展開定理は、著者の「弾性振動のモード制御の研究」の中のモード領域制御設計の構成理論の基礎部をなしている。この弾性振動系のモード制御の研究では、曲げ振動の基本次および第二次以上の高次の複数固有モードを設計上で考慮した謂わば「モード同時対角分離制御」設計法が一次元 (梁) と二次元 (平面板) の弾性体振動について定式化され、振動制御実験においてこれらが実証されたこととして銘記される。

次項では一次元梁 (単純支持の一樣弾性梁および一樣片持ち梁の二種類) の各固有関数による級数展開と



して、分布外力  $P_1(x)$  をはじめとするいくつかの連続関数の座標  $x$  についての固有モード展開近似例を示す。

### 3.4.3 分布関数の固有モード関数による級数展開

(1) 単純支持梁における分布外力の固有モード展開  
両端単純支持梁の固有値  $\beta_m$  と正規固有関数  $W_m$  :

$$b_m = \frac{mp}{l}, \quad W_m(x) = A_m \sin \frac{mp}{l} x, \\ A_m = \sqrt{2/l}, \quad (m=1,2,L) \dots (20)$$

分布外力  $P_1(x) \square P_4(x)$  の固有モード展開 : まず分布外力  $P_1(x)$  の  $p$  項による展開近似式はつぎのようになる :

$$P_1(x) = \sum_{r=1}^p k_r W_r(x) \dots (21) \\ k_r = \beta_r \langle P_1(x), M(x) W_r(x) \rangle \\ = \frac{\Gamma \pi}{l} \rho \int_0^l P_1(x) W_r(x) dx, \quad (r=1,2,\dots,p)$$

同様にして  $P_2(x), \dots, P_4(x)$  の固有モード展開がなされる (図8参照)

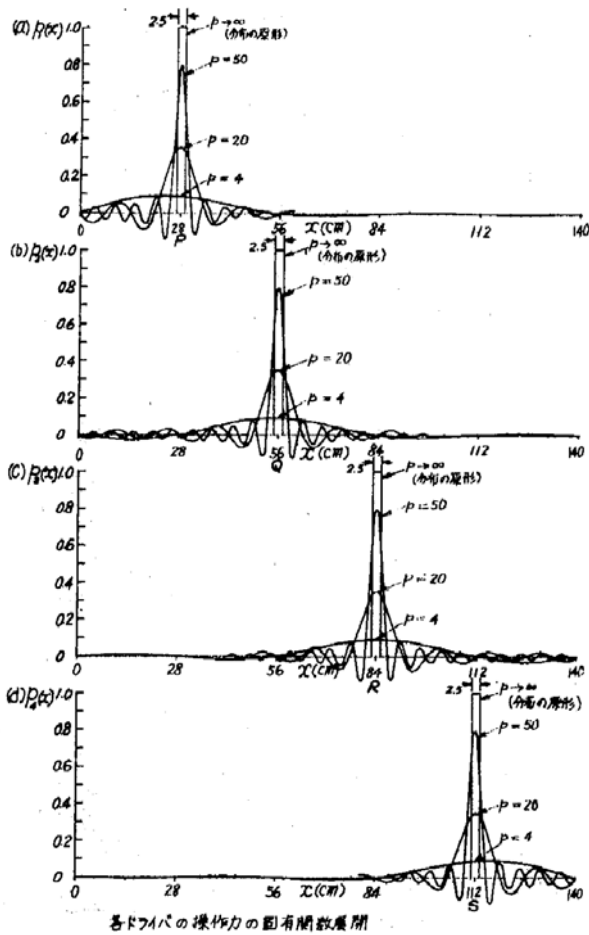


図8 分布  $P_1(x) \square P_4(x)$  の固有モード展開近似。  
(単純支持梁の固有モード関数による  $P_1(x), \dots, P_4(x)$  の4項近似( $p=4$ ), 20項近似( $p=20$ ), 50項近似( $p=50$ )および原形( $p=\infty$ )を図示.)

(2) 片持ち梁における分布外力の固有モード展開  
固有値  $\beta_m$  :  $\beta_m$  は振動数方程式 (超越方程式)  $\cos \beta l \square \cosh \beta l = -1$  の解として定まる。

片持ち梁の正規固有関数  $W_m$  :

$$W_m(x) = A_m \{ (\sin b_m l + \sinh b_m l) (\cos b_m x - \cosh b_m x) \\ - (\cos b_m l + \cosh b_m l) (\sin b_m x - \sinh b_m x) \} \dots (22) \\ A_m = 1 / \{ \sqrt{l} (\sin b_m l + \sinh b_m l) \}, \quad (m=1,2,L)$$

上掲 (1) の場合と全く同様に、分布外力  $P_1(x), P_2(x)$  について係数  $k_r$  による固有モード展開がなされる (図9参照)

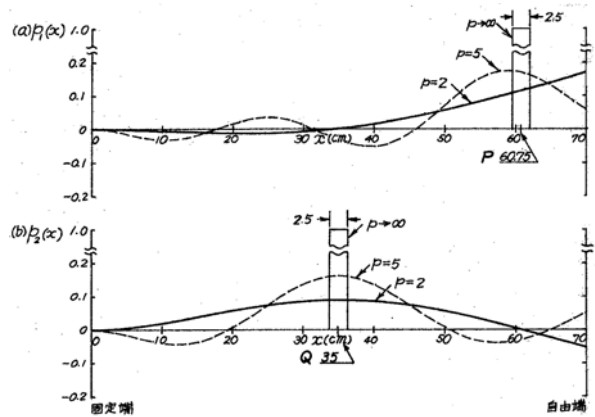


図9 分布  $P_1(x), P_2(x)$  の固有モード展開近似。  
(片持ち梁の固有モード関数による  $P_1(x), P_2(x)$  の2項近似( $p=2$ ), 5項近似( $p=5$ ) および原形( $p=\infty$ )を図示.)

### 3.5 平板振動の基礎方程式

ラプラス演算子  $\nabla^2$  による平板曲げ (撓み) 振動の重調和方程式の記述をする。

薄い、すなわち平板の中立面についての回転の慣性モーメントが無視される長方形平板の定義領域を  $D\{x, y | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$  として、曲げ (撓み) 振動の基礎方程式は、つぎのようにラプラス演算子  $\nabla^2$  を二重に作用させる二次元重調和偏微分方程式となる :

$$\begin{cases} \nabla^2 D \nabla^2 w(x, y, t) = -\rho \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + g(x, y, t), \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{cases} \dots (23)$$

境界  $\Gamma$  の境界条件式は、 $x=0, x=a$  において、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0;$$

$y=0, y=b$  において、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

ただし、 $w(x, y, t)$  (m) は平板の撓み変位、 $D$  (Nm) は平板の曲げ剛性、 $E$  (N/m<sup>2</sup>),  $h$  (m),  $\nu$  (-) は、それぞれ縦弾性係数 (Young's modulus), 板の厚さおよび

びポアソン比 (Poisson's ratio) である。平面板の単位面積当たりの質量分布は  $\rho h(x, y)$  となる。また  $g(x, y, t)$  は単位面積あたりの (振動) 垂直分布荷重である。

上に記した境界条件式は、四辺境界  $\Gamma$  がいずれも周辺自由である場合について適用される。なおこの周辺自由境界条件問題の解は、いずれの方法 (Rayleigh-Ritz の近似解法など) によるにせよ近似計算による数値解としてしか求まらない。

#### 4 結論

最近年の本荒川キャンパス機械工学科では、専門科目学習への準備として数学の複素関数論、ラプラス変換等に加えて線形数学についての学習、あるいは実験・実習・演習を含めた授業におけるコンピューター利用 (ツール・アプリケーション類, CAD, シミュレーション) ならびに情報技術=ICT (インターネット, 携帯モバイルおよび文書諸表の作成) についての学習によって、関連科目の自己能力の向上がはかられていることに眼醒しいものが有る。他方本校の各学科の所属教員は機械工学科に限らず、その所属する教科・系ごとにフィックスされた学問的に狭い守備範囲の教科目を担当科目として受け持つことを縦としてきた嫌いが従来あったことは否めない。

産技高専「本科」等での計測制御専門科目のあり方について展望をしたい。本校 (産技高専) の職業技術的學校として伝統のある専門分野と現代の新しい技術・学問領域からして、これらを視野にいられた個々の工学コース (全 8 コース) の中での計測制御分野の適切なる位置づけの必要性は当然のことであるが、品川・荒川両キャンパス経営・運営上の「ものづくり工学科」という単一の工学科において基礎科学として並べた「計測制御関連科目」を担うという基盤的・共通的な位置づけの観点との両側面をあわせ見据え、今後の本校両キャンパスにおいて展開される「計測制御教科系」の横断的なカリキュラム編成の実施や構成メンバーの強い連携・交流および人材・人的資源の充実が求められると考える。

本論文は、2007 (平成 19) 年度の産業技術高専研究奨励費による著者の研究「計測制御教科における開講科目の教材について」の研究成果の一部である。

おわりに本校の教育研究に対する関係各位の長年にわたるご理解とご支援に心より謝意を表します。

#### 参考文献

- 「シラバス (授業案内) 平成 19 年度」(A=航空工学科, M=機械工学科, E=電子工学科の各分冊), 東京都立航空工業高等専門学校発行, 2007 年 4 月
- 「シラバス (授業案内) 平成 19 年度」(ものづくり工学科第 1 および第 2 学年用合本), 東京都立産業技術高等専門学校発行, 2007 年 4 月
- 佐藤哲男:「参考資料 機械工学科における授業科目『制御工学』と関連する基礎科目について」, 校内配布プリント, 2006 年 6 月
- 佐藤哲男:「振動する弾性系のモード制御の研究」, 学位 (博士) 請求論文—検査用—, 東京大学大学院工学系研究科, 2005 年 12 月
- 佐藤哲男:「弾性振動のモード制御の研究」, 修士学位論文, 東京都立大学大学院工学研究科, 昭和 48 年 3 月
- 矢野健太郎・石原繁共著:「解析学概論」(訂正第 2 版), 裳華房, 昭和 41 年 2 月.
- フリードマン著, 佐藤良泰・大安和彬共訳:「新しい応用数学 原理とテクニック」, 地人書館, 昭和 46 年
- Housner, G. W. and Hudson, D. E. : "APPLIED MECHANICS —DYNAMICS —", Second Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1959, Maruzen Asian Edition, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, Japan, 昭和 35 年
- 佐藤哲男: 機械工学科 3 年「電気工学概論」補足プリント ('07. 2)
- 佐藤哲男: 機械工学科 4 年「電気工学概論」補足プリント ('07. 4; '07. 5; '07. 9)
- 和達三樹監修, 小暮陽三編集:「高専の物理」(第 5 版), 森北出版, 2000 年 1 月
- 小暮陽三編集:「高専の応用物理」(初版), 森北出版, 1995 年 4 月
- 小暮陽三監修:「高専の応用物理」(第 2 版), 森北出版, 1995 年 4 月
- 「電気工学概論」, 電気学会発行, オーム社, 1981 年 3 月
- 大山松次郎原著:「電気工学通論」(第 4 版), オーム社, 昭和 24 年 5 月
- 山口次郎ほか 3 名共編:「電気電子工学概論」, オーム社, 平成 4 年 2 月
- 原島鮮著:「改稿 教養物理学」, 学術図書出版社, 昭和 40 年 2 月
- 小野周, 遠藤真二, 小出昭一郎共著:「物理学—演習中心—」, 東京大学出版会, 1970 年 5 月
- SATO, T.: "Eigenvalue Problem —Deflated Matrix Solution for Multi-Degree of Freedom Body —", 「都立航空高専平成 16 年度研究紀要」第 42 号, pp.21-29, 2005 年 10 月
- 羽鳥秀雄, 佐藤哲男共著: 卒業論文, 「純流体素子のオートステープラへの応用」, 中央大学理工学部精密機械工学科, 昭和 44 年 3 月
- "Fluidic systems design guide", 1st edition, Fluidonic division of the Imperial-Eastman Co.
- "Workbook for the basic fluidics training program", Norgren Fluidics
- "Proposed NFPA and USA recommended standard graphic symbols for fluidic devices and circuits", The national fluid power association
- 浦田賢六郎編:「流体の力学 総論」, 東京プリント, (非売品), 1968 年 6 月
- 中山泰喜著:「新版 流体の力学」(訂正第 4 版), 養賢堂, 1992 年 2 月
- 斉藤芳郎: 流路の平面壁に設けた標準オリフィスの流量係数, 日本機械学会論文集 [B 編], 50 - 451, pp.632 - 639, 昭和 59 年 3 月