

完全導体円板による散乱電磁波の多倍長計算

黒木啓之*

柴崎年彦†

木下照弘‡

Multiple Precision Arithmetic of Diffracted Electromagnetic Waves
by Circular Disk of Perfect Conductor

Takashi Kuroki*

Toshihiko Shibazaki†

Teruhiro Kinoshita‡

Abstract In the case of the numerical calculation using the analysis method of Nomura and Katsura, good results up to 2.5 or 3.0 wavelength with the double precision or the quadruple precision are able to be obtained, to electromagnetic diffraction by a circular disk of a perfect conductor. The cause of it can be explained by the fact that the numerical calculation is executed with sufficient precision in the calculation process. GMP is the library that can execute the numerical calculation by multiple precision in C and C++ language. MPFR, based on GMP, is the supplementary library equipped with the mathematical library functions. GMP++ differs from GMP in terms of the classes. MPFR do not have C++ class interfaces. So, we have to design new interfaces. The purpose of this study is to investigate the cause of the fault results, and alter them to be good results using GMP, MPFR, GMP++ and the new interfaces while the radius of the disk is over 3 wavelengths.

keywords : scatter problem, circular disk of perfect conductor, current distribution, multi precision arithmetic, scatter field

1 はじめに

完全導体円板による電磁波の散乱問題は、野村・桂らによって、厳密な解析が行われている [1]。この解析手法に従って、散乱界を数値計算しようとした場合、一般的なプログラミング言語で使われる変数が持つ、倍精度や 4 倍精度の計算では、2.5 ~ 3 波長程度までしか良好な計算結果が得られないことが報告されている。[2]。この原因は、計算過程で精度が十分でないことが考えられる。

従来から計算精度が必要な変数に対し、メモリ領域などを確保して、精度を考慮した数値処理が検討されてきた。近年のコンピュータ処理能力の向上とメモリ容量の増大は、この種の問題を一般化し、C 言語および C++ 言語においては多倍長の数値計算が可能な数値計算ライブラリである GMP (GMP : GNU Multiple Precision Arithmetic Library) [3] が登場してきた。GMP は整数・有理数・浮動小数点数の変数に対し任意の桁数 (2 進数における桁数) を指定することができる。

多倍長精度数値計算ライブラリのうち、C 言語には

GMP をベースに任意精度浮動小数点演算を行うために MPFR (Multiple Precision Floating-Point Reliable Library) [4] というライブラリがある。MPFR には三角関数やガンマ関数など数学ライブラリ関数が用意されている上、任意の精度で計算値が得られる精度保証計算の関数群が用意されており、科学技術計算に威力を発揮する。しかしながら、C 言語の GMP では加算であっても `add(m,n)` など関数の形で記述しなければならないので、この点が非常に使い勝手が悪い。

一方、C++ 言語に対応したライブラリ (通称 GMP++) では、クラス変数が利用可能であり、変数の初期化や終了処理が必要ない。その上、GMP++ では加減乗除を `+-*/` 記号で行うことができ、C 言語の GMP に比して非常に使い勝手が良く、煩雑さは激減する。しかし、先の MPFR は C++ のクラスインターフェイスを持っておらず、MPFR を GMP++ で使うためには、独自のインターフェイスを作成・工夫する必要がある。

本研究では、MPFR を GMP++ で使うための独自のインターフェイスを工夫した多倍長計算法を適用して、先の完全導体円板による電磁波散乱問題の数値計算に当てはめて、従来法では良好な計算結果が得られなかった原因を探っている。

* 都立産技高専品川キャンパス電子情報コース, 准教授

† 都立産技高専品川キャンパス電子情報コース, 准教授

‡ 東京工芸大学工学部コンピュータ応用学科, 教授

平成 19 年 11 月 30 日受理

2 問題の設定

図 1 (a) のように, $z = 0$ の $y = 0$ の $x - y$ 平面に原点を中心とした半径 a の厚みのない完全導体円板が置かれており, 遠方から平面波が入射した場合の散乱界を求めることを考える. 入射界は, 図 1 (b) のように, $x - z$ 平面内より z 軸から測って α 度の方角から原点へ到来するものとし, 平面波の伝搬方向を

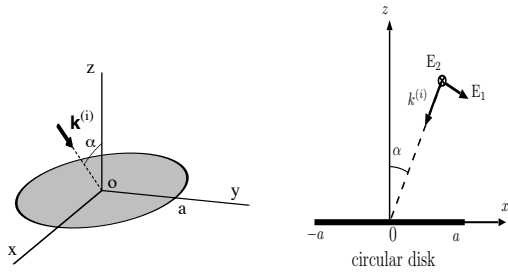
$$\mathbf{k}^{(i)} = k(-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$$

とする. このとき, 入射界の電氣的ヘルツベクトル $\Pi^{(i)}$ は, x, y 成分のみで,

$$\Pi^{(i)} = (\Pi_x^{(i)}, \Pi_y^{(i)}, 0)e^{-jk^{(i)} \cdot \mathbf{r}} \quad (1)$$

と表される.

ここで, 導体円板上の誘導電流は x および y 成分を持つが z 成分は持たないので, 電磁界の時間変化を $e^{j\omega t}$ とし (以下省略), 波数 $k(= \omega\sqrt{\mu\epsilon})$ を用いて, 誘導電流から生じる散乱界 $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$ は,



(a) 導体円板 (半径 a , 厚み 0) (b) 平面波の座標系
図 1. 導体円板と入射平面波の座標系

Fig.1 A Coordinate system of a conductive disk and an incident plate wave.

$$\mathbf{E}^{(s)} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) + k^2 \mathbf{\Pi} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}^{(s)} = j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{\Pi} \quad (3)$$

と表すことができる. また,

$$\Pi_x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi, \quad (4)$$

$$\Pi_y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi, \quad (5)$$

$$\Pi_z = 0, \quad (6)$$

と展開できる [1]. ただし, 式中の ϵ_n は,

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ 2 & (n \neq 0), \end{cases}$$

である. さらに $S_m^n(r, z)$ は文献 [1] で得られている波動方程式の固有関数であり, 導体円板表面を除いて連続な性質を持っている. $A_m^n, B_m^n, C_m^n, D_m^n$ は展開係数であり, 境界条件などから決定される未知定数である.

展開係数を決定するには, 電磁界を波動方程式の解により展開し, 境界条件, 端点条件, 外向放射条件を満足する必要がある. 解析としては, 任意のスカラー関数を導入し, 波動方程式を円筒座標系で表現することで, 展開係数が決定できる. その解析結果については, 文献 [5] で詳しく述べているので, ここでは数値計算の手順に従って, 計算に必要な式のみを次章で示す.

3 数値計算の流れ

パラメータとして図 1 (a) の円板の半径 a と, 波長 λ の比 a/λ を取り,

$$\gamma = ka = 2\pi \times \frac{a}{\lambda}$$

の値を決定し, 展開係数 $n = 0, 1, 2, \dots$ について次の手順で計算する.

1. 次式 (7)–(9) より, マトリクス方程式の係数などを求める.

$$\begin{aligned} G_{\ell, m}^n &= \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \ell + 1)\Gamma(\ell + 1)} \\ &\times \{g_1(n + m + \ell, |m - \ell|) - jg_2(m + n + \ell, |m - \ell|)\}, \quad (7) \\ g_1(p, q) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &\times \frac{\Gamma(p - k + \frac{1}{2})\Gamma(2k + 1)\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2} - k)\Gamma(p + k + \frac{3}{2})\Gamma(k + q + 1)\Gamma(k - q + 1)}, \quad (8) \\ g_2(p, q) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &\times \frac{\Gamma(p + k + 1)\Gamma(2p + 2k + 2)\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p + 2k + 1}}{\Gamma(2p + k + 2)\Gamma(p + k + q + \frac{3}{2})} \\ &\times \frac{1}{\Gamma(p + k - q + \frac{3}{2})\Gamma(p + k + \frac{3}{2})}. \quad (9) \end{aligned}$$

2. 入射電界 $\mathbf{E}^{(i)}$ を与え, 式 (10)–(12) に適用し, 円板上での 1 次ヘルツベクトルの展開係数を求める.

$$\Pi_x^{(e, o)\ell} = - \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_x^{(i)\ell} dt, \quad (10)$$

$$\Pi_y^{(e, o)\ell} = - \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_y^{(i)\ell} dt, \quad (11)$$

$$f_\ell^n = \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) J_n(\gamma\sqrt{t}) dt. \quad (12)$$

ただし, 式 (4), (5) の固有関数は,

$$S_m^n(r, 0) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_n(r\xi/a) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - (ka)^2}} d\xi, \quad (13)$$

であり [1], 簡単のために $ka = \gamma, (\frac{r}{a})^2 = t$, と表して, Jacobi の多項式に関連した

$$t^{n/2} u_m^n(t) = \int_0^\infty \frac{J_n(\xi\sqrt{t}) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad (14)$$

を用いて展開している. この $u_m^n(t)$ は $0 < t < 1$ において直交完備な関数列である.

また入射電界は以下のように与えられる. 平面波入射の場合, 入射電界 $E^{(i)}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(i)} &= (E_2 \cos \alpha, E_1, -E_2 \sin \alpha) \\ &\times e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^{(i)} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}^{(i)} \quad (16)$$

と表すことができる. ここで, α は z 軸から正の x 軸方向に計った入射波の伝搬方向である.

このとき, 入射波はヘルツベクトル

$$\boldsymbol{\Pi}^{(i)} = (\Pi_x, \Pi_y, 0) \quad (17)$$

$$\Pi_x = -\frac{E_2}{k^2 \cos \alpha} e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \quad (18)$$

$$\Pi_y = \frac{E_1}{k^2} e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \quad (19)$$

を用いて表すことができる.

円板上では,

$$\Pi_x(x, y, 0) = -\frac{E_2}{k^2 \cos \alpha} e^{-jkx \sin \alpha} \quad (20)$$

$$\Pi_y(x, y, 0) = \frac{E_1}{k^2} e^{-jkx \sin \alpha}. \quad (21)$$

ここで,

$$e^{ja \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n j^n J_n(a) \cos n\varphi \quad (22)$$

より,

$$e^{jkx \sin \alpha} = e^{jkr \sin \alpha \cos \varphi} \quad (23)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n J_n(kr \sin \alpha) \cos n\varphi \quad (24)$$

と表すことができるので, (10), (11), およびベッセル関数の展開である,

$$I = \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) J_n(\gamma\sqrt{t}) dt$$

$$= \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2\ell+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (25)$$

式より,

$$\begin{aligned} \Pi_{x\ell}^{(e)n} &= \frac{(-j)^n E_2}{k^2 \cos \alpha} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) J_n(\sqrt{t} \gamma \sin \alpha) dt \\ &= \frac{(-j)^n E_2}{\sqrt{2} k^2 \cos \alpha} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)} \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2} \gamma \sin \alpha\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{y\ell}^{(e)n} &= -\frac{(-j)^n E_1}{\sqrt{2} k^2} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)} \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2} \gamma \sin \alpha\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Pi_{x\ell}^{(o)n} = \Pi_{y\ell}^{(o)n} = 0 \quad (28)$$

と表すことができる.

3. 無限連立 1 次方程式を有限項で打ち切って近似して解くことにより, 係数 (29)–(33) を求める.

$$\left[\widetilde{A}_m^n \right] = \left[G_{\ell,m}^n \right]^{-1} \left[\Pi_{x\ell}^{(e)n} \right], \quad (29)$$

$$\left[\widetilde{B}_m^n \right] = \left[G_{\ell,m}^n \right]^{-1} \left[\Pi_{x\ell}^{(o)n} \right], \quad (30)$$

$$\left[\widetilde{C}_m^n \right] = \left[G_{\ell,m}^n \right]^{-1} \left[\Pi_{y\ell}^{(e)n} \right], \quad (31)$$

$$\left[\widetilde{D}_m^n \right] = \left[G_{\ell,m}^n \right]^{-1} \left[\Pi_{y\ell}^{(o)n} \right], \quad (32)$$

$$\left[\widetilde{f}_m^n \right] = \left[G_{\ell,m}^n \right]^{-1} [f_\ell^n]. \quad (33)$$

4. 係数が端点条件を満足するよう, 式 (34)–(36) より補正係数を求める.

$$kU_0^{(e)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\widetilde{A}_m^1 + \widetilde{D}_m^1 \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \widetilde{f}_m^1}, \quad (34)$$

$$kU_n^{(e)} = -\frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\widetilde{A}_m^{n-1} + \widetilde{A}_m^{n+1} - \widetilde{D}_m^{n-1} + \widetilde{D}_m^{n+1} \right]}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right]} \quad (n \geq 1), \quad (35)$$

$$kU_n^{(o)} = -\frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\widetilde{B}_m^{n-1} + \widetilde{B}_m^{n+1} + \widetilde{C}_m^{n-1} - \widetilde{C}_m^{n+1} \right]}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right]} \quad (n \geq 1). \quad (36)$$

ただし, $\widetilde{B_m^0} = \widetilde{D_m^0} = 0$.

5. 式 (37)–(40) より散乱界 (2 次界) のヘルツベクトルの展開係数が得られる.

$$[A_m^n] = [\widetilde{A_m^n}] + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) [\widetilde{f_m^n}], \quad (37)$$

$$[B_m^n] = [\widetilde{B_m^n}] + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) [\widetilde{f_m^n}], \quad (38)$$

$$[C_m^n] = [\widetilde{C_m^n}] + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) [\widetilde{f_m^n}], \quad (39)$$

$$[D_m^n] = [\widetilde{D_m^n}] - \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) [\widetilde{f_m^n}]. \quad (40)$$

以上, 未知の展開係数を決定する手順を示した. 本研究では最終的には電流分布及び遠方放射界の数値計算を行うが, 本論では誤差が多く含まれる可能性のある展開係数を求める部分までに焦点を当てて議論する.

4 GMP クラス変数と MPFR の関数群のインターフェイス

今回作成したインターフェイスの流れを図 2 に示す. 図のように, gmp クラス形式で変数を関数に受け渡し, 関数内部でまず gmp クラスから mpfr 形式の変数に変換し, 次に mpfr 形式の変数で当該関数を計算する. 次に mpfr 形式の変数から gmp クラスに変換をするが, この操作は直接できない. そこでまず mpfr 形式の変数から gmp 形式の変数に変換し, さらに gmp 形式の変数から gmp クラスに変換を行っている. その gmp クラスを戻り値として返している. また, このようなプロセスにおいて変数間で多倍長形式の変数がやりとりがなされているが, それぞれ同じ精度でやりとりがなされているので, 精度は保証されている.

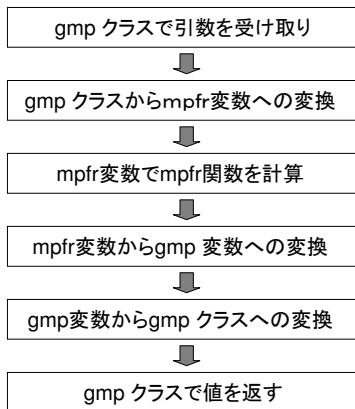


図 2 . gmp クラスから mpfr 関数の利用方法

Fig.2 Utilizing a mpfr library by a gmp class.

5 数値計算

5.1 数値計算における問題点

本研究の最終的な目標である電流分布および遠方放射界を計算するまでの計算の中で, このような誤差が出てくる可能性が大きい部分は連立 1 次方程式の係数である $G_{\ell,m}^n$ の計算と, 実際に連立 1 次方程式を解く部分と考えられる. そこでここでは, この 2 つの計算を GMP で設定できる計算精度と円板の半径 a と波長 λ の比 a/λ をパラメータとして, $G_{\ell,m}^n$ の構成要素である g_1 と g_2 , および A_m^n を計算する. その結果を大きな計算精度で計算した結果と比較し, 設定された各計算精度と a/λ の関係を探る. 今回は, 仮数部 512[bit] で設定し計算をした結果を比較対象とした. また ∞ まで加算するような計算については, 100 項まで計算するようにした. すべてにおいて丸めモードは最近接値への丸めを採用している.

また, 計算精度・計算速度の点から式展開などで可能な工夫はできる限り行う. 今回, 式 (8), (9) は以下のように展開して, ガンマ関数をそのまま計算しないようにしている.

$$g_1(p, q) = \sum_{k=q}^{\infty} a_k$$

$$a_q = \frac{(-1)^q 2^{2q} \gamma^{2q}}{q!} \times \{2(p-1) + 1 - 2q\} \{2(p-2) + 1 - 2q\} \cdots \{1 - 2q\}$$

$$\times \frac{1}{(2p+2q+1)(2p+2q)(2p+2q-1) \cdots (p+q+1)}$$

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{(2k-1)^2}{(p+k+\frac{1}{2})(p-k+\frac{1}{2})(k+q)(k-q)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \quad (41)$$

$$g_2(p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$b_0 = \frac{2^{2q} \gamma^{2q+1}}{\pi} \times \frac{p(p-1)(p-2) \cdots 1}{(p+\frac{1}{2})(p-\frac{1}{2})(p-\frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2}}$$

$$\times \frac{1}{(2(p+q)+1)} \frac{1}{(2(p+q)-1)} \cdots \frac{1}{(2(p-q)+3)}$$

$$\times \left(\frac{1}{(2(p-q)+1)}\right)^2 \left(\frac{1}{(2(p-q)-1)}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad (42)$$

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{4(p+k)^2 \gamma^2}{k(2p+k+1)(2p+2k+2q+1)(2p+2k-2q+1)}$$

$$\quad (44)$$

5.2 $G_{\ell,m}^n$ の計算

ここでは、 $G_{\ell,m}^n$ の構成要素である g_1 および g_2 と計算精度及び a/λ との関係を検証する．ただし g_1 および g_2 は m, n, ℓ をパラメータとするのではなく、 p, q をパラメータとして計算を行った． p, q はそれぞれ 0~9 まで可変させた．

図 3 は、設定した計算精度をパラメータとして、各 a/λ において g_1 および g_2 の 10 進数で何桁目で誤差が生じるかを表したものである．誤差が出た桁数は各 g_1 および g_2 での誤差の出た桁数の平均を取った．図 3 より、どのような精度を設定しても a/λ が 1 から下がって行き、7 を下限として再度上がっていく、という傾向が見られる．特に倍精度と同等と見られる仮数部を 64[bit] で設定したもののについては、 a/λ が 5 から 7 においては、1 桁目より数値が異なっている．ただし、 \sum の k が小さい項については 64[bit] でも 512[bit] と比較した結果、64[bit] の 10 進数での最大表示桁数 20 桁に近い桁数で数値が一致しているのは確認しているので、 k が大きい時に誤差を多く含むのではないかと考えている．

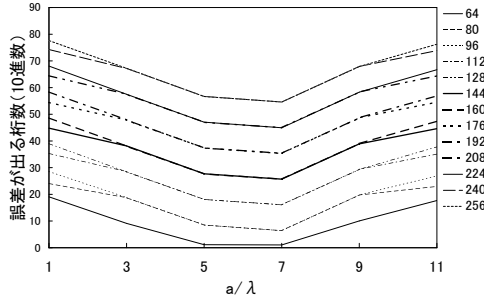


図 3 . $G_{\ell,m}^n$ に対する a/λ での誤差の出る桁数

Fig.3 Digit number of errors occurred at a/λ for $G_{\ell,m}^n$.

5.3 A_m^n の計算

ここでは、散乱界 (2 次界) のヘルツベクトルの展開係数の 1 つである A_m^n について計算し、 $G_{\ell,m}^n$ と同じように傾向を調べた．ただしここでは $G_{\ell,m}^n$ の時と異なり $\alpha = 45[\text{度}]$ などの実際の値を入れて計算を行った．また n, m ともに 0~9 まで可変させた．

図 4 は、設定した計算精度をパラメータとして、各 a/λ において A_m^n の何桁目で誤差が生じるかを表したものである．誤差が出た桁数は各 A_m^n の実部と虚部での誤差の出た桁数の平均を取った．傾向としては $G_{\ell,m}^n$ と変わらない．ただ a/λ が 7 から 11 で精度が落ちていくのは、連立 1 次方程式の計算が原因と考えられる．

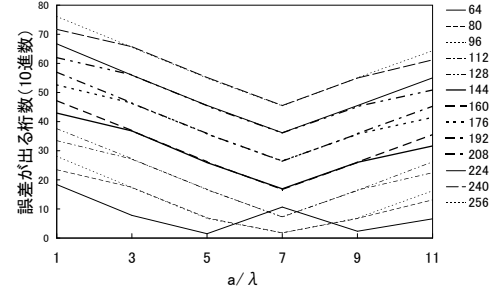


図 4 . A_m^n に対する a/λ での誤差の出る桁数

Fig.4 Digit number of errors occurred at a/λ for A_m^n .

6 $G_{\ell,m}^n$ の精度の分析

これまでの結果から、 $G_{\ell,m}^n$ の計算では、 $a > 4\lambda$ に対してほとんど精度の保持ができないが、データ幅を広げれば、途中精度は落ちるものの必要な精度は保持できることがわかった．

さらに A_m^n の計算では、 $G_{\ell,m}^n$ での精度の 1~2 桁程度落ちるだけであり、この部分での精度の低下は見られない (ただし、 p, q が大きくなる場合にこのことが言えるかは未検証である) ．

そこで、精度が落ちる主要因が $G_{\ell,m}^n$ にあると考え、ここでは $G_{\ell,m}^n$ の精度について詳細に検証する．

まず、 $G_{\ell,m}^n$ の構成要素である $g_1(p, q)$ 、 $g_2(p, q)$ の計算が無限交項級数であることから、この部分で桁落ちをしている可能性がある．そこで、式 (43) と (46) の精度について検証する．今回は検証の結果、傾向が同じのため $g_1(p, q)$ のみに主眼をおいて結果を示す．

各 a_k を精度 512[bit] で計算した結果を基準として比較する形で $k = 1, 2, 3, \dots$ と加算した過程での精度を検証した．図 5 に $p = 0, q = 0, a/\lambda = 1, 2, 3, 5$ 、計算精度を 64[bit] とした時の精度の推移を示す．横軸は k 、縦軸は 512[bit] で計算した同様の値と一致した 10 進数での桁数を示す．図から、 a/λ が小さい場合は k が増えてある程度精度が落ちてでもそれ以降は精度を保つことがわかる．さらに a/λ が大きくなると徐々に計算精度が低下していく．特に $a/\lambda = 5$ の時には一致する桁数が 0 となることから、全く異なった値として計算されていることがわかる．したがって、 a/λ が大きくなった時に計算結果がおかしくなるのは、まずこの計算精度の悪さが原因となっていることがわかる．

次に、計算精度を 128[bit] に上げた時の結果を図 6 に示す．ただし、 a/λ は 1~11 まで可変させた．図 5 と比較し、 $a/\lambda = 5$ の場合でも 15 桁程度の計算精度は保持されるが、 $a/\lambda = 9$ のときには計算精度は 0 になってしまう．しかしながら $a/\lambda = 11$ の時は計算精

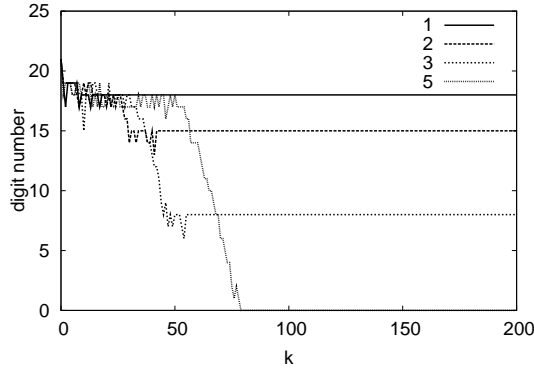


図 5 . $p = 0$, $q = 0$, $a/\lambda = 1, 2, 3, 5$, 計算精度 64[bit] の場合の精度の推移

Fig.5 Digit number of errors occurred at $p = 0$, $q = 0$, $a/\lambda = 1, 2, 3, 5$, precision of arithmetic = 64[bit].

度が向上する．この結果から，精度が落ちていくには何らかの法則性があることが考えられる．

ここで，図 3 において a/λ が大きくなると精度が向上することについて検証しておく．図 6 から， a/λ は初期には計算精度は落ちず，ある k の値から急激に精度が落ち始め，最終的にある一定値となる，という傾向がある．また a/λ が大きくなると精度が落ち始める k の値も大きくなる．図 3 では k を 100 となった時に計算を打ち切っているため， a/λ が大きいときに精度が向上したのは，精度が一定値に落ちる前に計算を終了していたためであると考えられる．

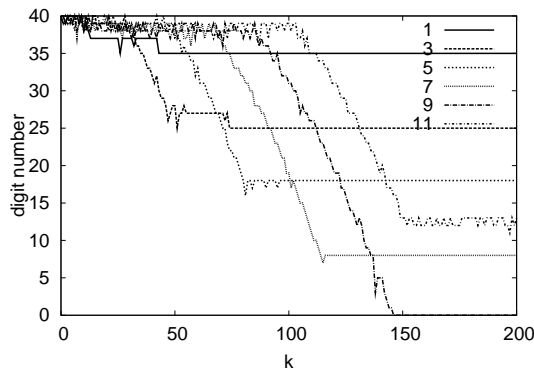


図 6 . $p = 0$, $q = 0$, $a/\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, 計算精度 128[bit] の場合の精度の推移

Fig.6 Digit number of errors occurred at $p = 0$, $q = 0$, $a/\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, precision of arithmetic = 128[bit].

7 むすび

本稿では，GMP ライブラリを用い，計算精度を考慮する上で多倍長計算法を適用して，完全導体円板に

よる電磁波散乱問題の数値計算に当てはめ，従来法では良好な計算結果が得られなかった原因を探った．

a が 2.5 ~ 3.0 波長以上で良好な結果が得られない原因の一つは $G_{\ell,m}^n$ の計算に存在し，さらにそれは級数展開の項の加減算に存在していることがわかった．ただしそれらは多倍長計算で補うことが可能であり，どの程度の桁数の精度が欲しいのかはある法則性により検証可能であろうことが見出せた．

今後はこの法則性などについて検証していく．

参考文献

- [1] Yukichi Nomura, Shigetoshi Katsura : “Diffraction of Electromagnetic Waves by Circular Plate and Circular Hole,” *J. Physical Society of Japan*, Vol. 10, No. 4, pp.285-304, Apr. 1955.
- [2] M Ando, T Murasaki, T Kinoshita : “Elimination of false singularities in GTD equivalent edge currents,” *Proc. IEEE*, H-138, 4, pp.289-296, Aug. 1991.
- [3] “GNU MP-The GNU Multiple Precision Arithmetic Library,” Edition 4.2.1, May, 2006.
- [4] “MPFR-The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library,” Edition 4.2.1, May, 2006.
- [5] 黒木啓之, 木下照弘, 柴崎年彦, 松田勲 : “計算精度を考慮した完全導体円板による散乱電磁波の数値解析,” 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT-07-95, pp.85-90, 2007-10.