固定小数点マイクロプロセッサに適した制御アルゴリズムの実装方法

― 変数変調デルタオペレーションのモデル規範型適応制御系への適用 ―

Implementation Methodology of Control Algorithms for Fixed-Point Microprocessors
— An Application of VMM to MRACS —

青　木　　立

Tatsu　Aoki

Abstract:The methodology we propose for realizing energy and space saving model reference adaptive control system (MRACS) is based on pulse width modulation (PWM) with a modified delta operator. The dynamic calculation range is at least twice that of the conventional range in fixed-point arithmetic, making it very useful in mechatronic systems because complex control algorithms can be implemented in short word-length. The present paper is aimed at applying the methodology named VMM to MRACS and verify the availability of VMM. First, the outline of VMM is described. Next, the implementation procedures of MRACS based on the shift operator and VMM form are shown. Finally, both methods are compared on the first-order system. In the case of a 16 bit word-length both responses are not different from those by using floating-point arithmetic. In the case of an 8 bit word-length responses based on VMM are almost similar to those by using floating-point arithmetic unlike the conventional method based on the shift operator. Thus, the availability of VMM was made clear in the case of a short word-length.

Keywords: Delta operator, Digital control, PID control, Variable modulation method, Mechatronics, Dsp

1. はじめに

モデル規範型適応制御系(Model Reference Adaptive Control System, MRACS)では，フィードバック制御系の特性がモデルの特性に一致するようにフィードバックゲインを自動的に調節する．ゲインを自動的に調節するためには，偏差を高速にサンプリングして，その情報に基づいて積分演算を高精度に演算する必要がある．しかし，高速サンプリング制御系では，シフトオペレータzに基づいた制御アルゴリズムが数値的に不安定になるため，制御系全体が不安定になる．この数値的不安定性を低減する手法としてデルタオペレータ$\boldsymbol{\delta}$を用いた手法が有効である[1)−8)]．

一方，産業界では制御システムに省エネルギ化，省スペース化，低コスト化などが要求されるため，固定小数点マイクロプロセッサが多用されている．しかし，固定小数点演算の狭いダイナミックレンジではデルタオペレーションの有効性が失われる[9),10)]．そこで，固定小数点演算においてもデルタオペレーションが有効となるような手法，変数変調法(VMM)が提案された[11)−17)]．本論文では1次系に関するMRACSを例に，VMMの有効性をシミュレーションにより検証する．

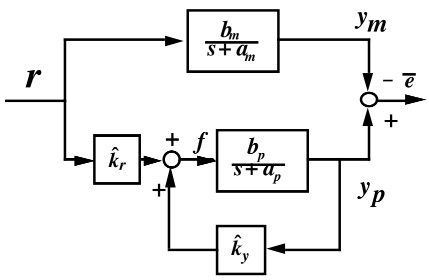


Fig. 1 MRACS

2. デルタオペレータに基づいた制御アルゴリズム

シフトオペレータzに基づいた制御アルゴリズムでは，遅延z^{-1}した信号に基づいて演算を実行する．これに対して，デルタオペレーションでは，サンプリング周期をTとすると，遅延z^{-1}の代わりに$\boldsymbol{\delta}^{-1}$，すなわち，積分演算を行う必要がある．

$$\boldsymbol{\delta}^{-1} = T\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{1}$$

都立産業技術高専　ものづくり工学科

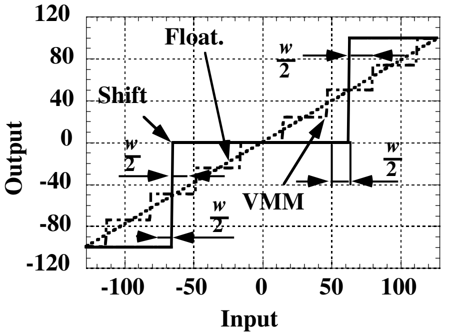


Fig. 2 The extension of the dynamic range at an 8 bit word-length

固定小数点演算の狭いダイナミックレンジでは，サンプリング周期Tの微小な値を表現することが困難である．また，式(1)においてTの値が小さいとアンダフローが発生し，逆にスケール変換によりTの値を大きく設定するとオーバフローが発生する．このように固定小数点演算では高精度に積分を演算することが困難なため，デルタオペレーションの有効性が失われる．この問題を解決するためVMMが提案された．

- **オーバフロー発生の回避**

  次式により修正逆デルタオペレータを定義する．

$$\delta'^{-1} = T_j \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{2}$$

  式(1)においてサンプリング周期Tを調整ゲインT_jに置き換えることにより積分値が調整可能になる．

- **アンダフロー発生の低減**

  図2に示すように，VMMにより積分演算のダイナミックレンジが拡大する．図3にVMMに基づいたコントローラを示す．PWMをソフトウェアにより実現するため，一定値のバイアスw及び以下に示すz変換の定理を利用する．

$$(-1)^{-k}\,\bar{u}_k = H(-z)(-1)^{-k}\,e_k \tag{3}$$

  式(3)より当初の伝達関数$H(z)$と入出力関係が等価になるためには，入力e_kと出力$\bar{u}_k$をサンプリング周期ごとに符号変調及び復調する必要がある．また，バイアスwはコントローラへの入力となるため，出力に影響を与える．この影響を低減するため，ハイパスフィルタ$(1-z^{-1})/2$を導入する．出力信号$\bar{u}_k$と$\bar{u}_{k-1}$はそれぞれ符号変調されているので，フィルタの出力はこれらの出力信号の平均になる．なお，バイアスwを周期的に変化させることによりダイナミックレンジはさらに拡大する[14]．

nビットの固定小数点数において，小数点の位置は最上位ビットの左側に設定すると，任意の数は±1の範囲に収まるため，積におけるオーバフローを避けることができる．

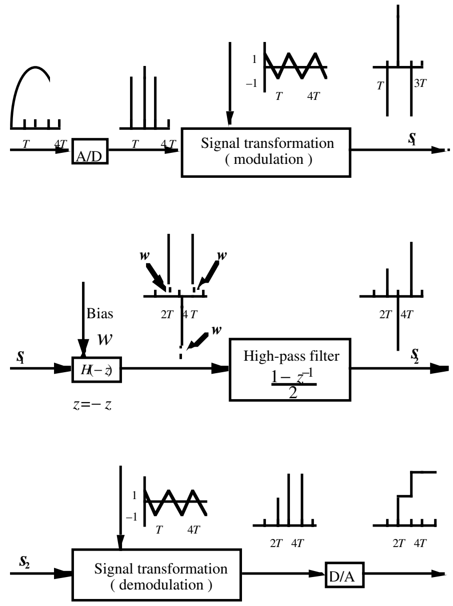
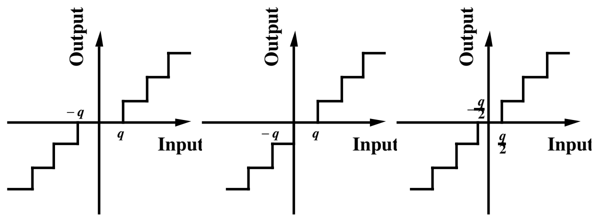


Fig. 3 Digital controller based on the VMM form



(a) Division　(b) Truncation　(c) Roundoff

Fig. 4 Quantization effects

この場合，乗算結果の加減算において桁合わせが不要になるため，制御アルゴリズムの実装が容易になる．しかし，演算途中において内部変数が±1の範囲を越えないようにするため，入力ゲインk_iをコントローラの入力e_kに乗じる必要がある．同様の理由により，出力ゲインk_oをアルゴリズム係数bに乗じる．また，乗算の結果pは後続する演算を実行するため，語長をnビットに短縮する．このときに発生する誤差は四捨五入$m(p)$により低減する．

$$m(p) = \frac{p + 2^{n-2}}{2^{n-1}} \tag{4}$$

式(4)により図4(c)に示す四捨五入を実現する．このためには，除算/において図4(b)に示す演算結果になる必要がある．しかし，c言語などでの除算/の演算結果は図4(a)に示す結果になるため，シフト命令$>> n-1$を用いる必要がある．一方，VMMの場合には以下に示す$m'(p)$を用いるが，同様にシフト命令を用いる．なお，wの値は図2から2^{n-3}に設定する．

$$m'(p) = \frac{p + 2^{n-2} + w}{2^{n-1}} \tag{5}$$

3. MRACSに基づいた制御アルゴリズムの導出

図1に示すMRACSについて考える．

$$H_1(s) = \frac{b_m}{s + a_m} \tag{6}$$

$$H(s) = \frac{b_p}{s + a_p} \tag{7}$$

閉ループ系の極はゲイン$\hat{k}_y$によりモデルの極$-a_m$に一致するように調節される．また，閉ループ系のDCゲインはゲイン$\hat{k}_r$によりモデルのDCゲインb_m/a_mに一致するように調節される．ゲインの調整則は，出力誤差$\bar{e}$とゲイン誤差$\tilde{k}_y$及び$\tilde{k}_r$を用いた以下のリアプノフ関数$V(t)$が$\dot{V}(t) < 0$になる条件から求まる[18]．ここで，γは任意の定数とする．

$$V(t) = \frac{1}{2}\bar{e}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\left(\tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_r^2\right) \tag{8}$$

$$\hat{k}_y = -\gamma \int \bar{e}\, y_p\, dt \tag{9}$$

$$\hat{k}_r = -\gamma \int \bar{e}\, r\, dt \tag{10}$$

なお，式(9)，(10)において，各ゲインの調節速度は入力rやプラントの出力y_pの大きさにより変化する．そこで，以下に示す関数を用いてそれらを正規化する．

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \tag{11}$$

以上より，MRACSに基づいたコントローラは，モデルである1次遅れ系$H_1(s)$とゲイン$\hat{k}_r$及び$\hat{k}_y$の調整則である積分演算$H_2(s), H_3(s)$で構成される．

3.1 シフトオペレータに基づいた制御アルゴリズム

3.1.1 伝達関数$H_1(s)$

零次ホールドにより式(6)を離散化する．

$$H_1(z) = \frac{b}{z + a} \tag{12}$$

$$a = -e^{-a_m T} \quad b = \frac{b_m}{a_m}\left(1 - e^{-a_m T}\right)$$

式(12)と図5より制御アルゴリズムが求まる．

$$\begin{aligned} x_k &= k_i e_k - m\,(a x_{k-1}) \\ \bar{u}_k &= m\,(k_o b\, x_{k-1}) \\ u_k &= m\left(\frac{1}{k_i k_o}\,\bar{u}_k\right) \\ x_{k-1} &= x_k \end{aligned} \tag{13}$$

3.1.2 積分演算$H_2(s)$, $H_3(s)$

式(9)及び式(10)の積分$-\gamma/s$を離散化する．

$$H_2(z) = \frac{b}{z - 1} \quad b = -\gamma T \tag{14}$$

式(14)と図6より制御アルゴリズムが求まる．$H_3(s)$も同様にして求まる。

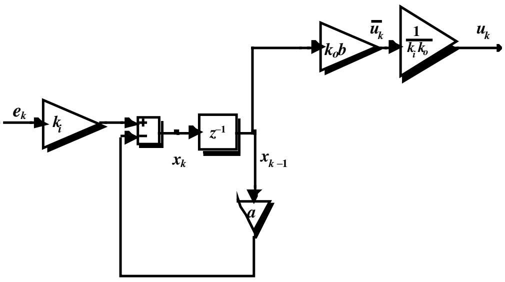


Fig. 5 Shift form on the first-order system

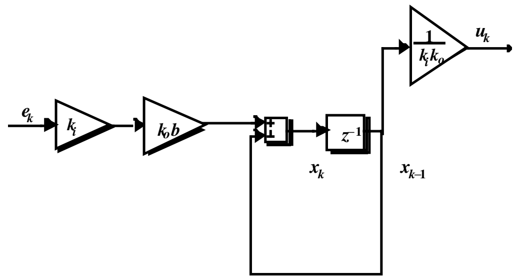


Fig. 6 Shift form on the integral term

$$\begin{aligned} x_k &= (k_i e_k)(k_o b) + x_{k-1} \\ u_k &= m\left(\frac{1}{k_i k_o}\, x_{k-1}\right) \\ x_{k-1} &= x_k \end{aligned} \tag{15}$$

なお，サンプリング周期Tが短く，語長が短い固定小数点数の場合，bを表現できない．そこで，ゲインk_oを用いたスケール変換によりbの値を大きくする．

3.2 修正デルタオペレータに基づいた制御アルゴリズム

3.2.1 伝達関数$H_1(z)$

1) $z = -z$の代入

式(3)に示すz変換の定理を利用する．

$$H_1(-z) = \frac{b}{-z + a} \tag{16}$$

2) 修正デルタ変換

修正デルタオペレータを以下のように定義する．

$$\delta' = \frac{-z - 1}{T_1} \tag{17}$$

$$z = -T_1 \delta' - 1 \tag{18}$$

ここでT_1は後述する積分値x_k^1の値がオーバフローしないように調節するためのゲインである．このzを式(16)に代入することによりVMMに基づいた演算式が求まる．

$$H_1(\delta') = \frac{b'\delta'^{-1}}{1 + a'\delta'^{-1}},\ a' = \frac{1 + a}{T_1},\ \ b' = \frac{b}{T_1} \tag{19}$$

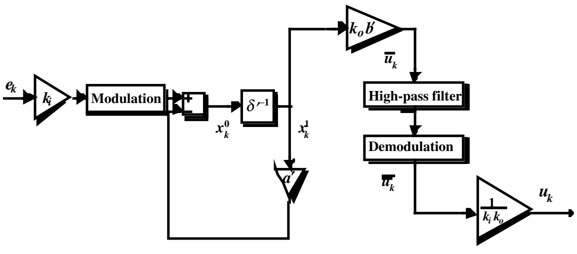


Fig. 7 VMM form on the first-order system

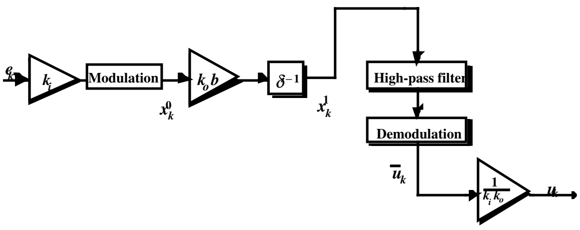


Fig. 8 VMM form on the integral term

Table 1 Scaling

	Shift form		VMM		
	k_i	k_o	k_i	T_1	k_o
$H_1(z)$	0.1	10	1	0.1	1
$H_2(z)$	0.5	2	0.5	—	2
$H_3(z)$	1	1	1	—	1

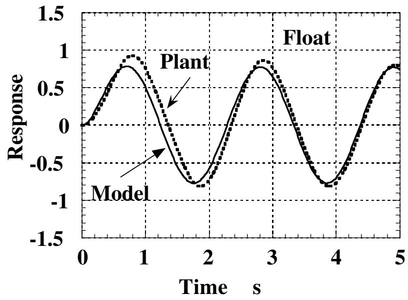


Fig. 9 Model and plant output

式(17)及び式(19)と図7より制御アルゴリズムが求まる．

$$
\begin{aligned}
x_k^0 &= (-1)^k k_i e_k - m\left(a' x_k^1\right) \\
\bar{u}_k &= m\left(k_o b' x_k^1\right) \\
\bar{\bar{u}}_k &= (-1)^k \frac{\bar{u}_k - \bar{u}_{k-1}}{2} \\
u_k &= m\left(\frac{1}{k_i k_o}\bar{\bar{u}}_k\right) \\
x_{k+1}^1 &= -x_k^1 - m'\left(T_1 x_k^0\right) \\
\bar{u}_{k-1} &= \bar{u}_k
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$'if\ else'$文を用いてkの値が偶数か奇数かで場合分けをすることにより，演算量は従来のデルタオペレーションに符号変調及び復調と図3に示すハイパスフィルタ演算を加えた演算になり，ほぼ同等となる．

3.2.2 積分演算$H_2(z)$, $H_3(z)$

$H_1(z)$と同様に$z = -z$を代入した後，以下の修正デルタオペレータを用いる．

$$\delta' = -z - 1 \tag{21}$$

図8より次式の制御アルゴリズムが求まる．

$$
\begin{aligned}
x_k^0 &= (-1)^k k_i e_k \\
\bar{u}_k &= (-1)^k \frac{x_k^1 - x_{k-1}^1}{2} \\
u_k &= m\left(\frac{1}{k_i k_o}\bar{u}_k\right) \\
x_{k+1}^1 &= -x_k^1 - m'\left(k_o b x_k^0\right)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

4. VMMの有効性の検証

4.1 モデルの設定

MRACSのモデル及びプラントの伝達関数を式(23), (24)に示す．

- モデル

$$H_1(s) = \frac{5}{s+5} \tag{23}$$

- プラント

$$H_1(s) = \frac{3}{s+2} \tag{24}$$

4.2 シミュレーション

シミュレーションには，Matlab/Simulink及びFixed-point toolboxを用いた．また，サンプリング周期Tは20ms，調整ゲインγは-5とした．表1に固定小数点演算におけるスケール変換を示す．なお，モデルは零次ホールドにより離散化し，プラントは連続時間系としてシミュレーションを実行した．図9及び図10にMRACSの応答を示す．語長が16ビットの場合，両手法の間に大きな差異はなかった．しかし，語長が8ビットの場合，アンダフローによる演算誤差のため，プラントがモデルに追従できずに偏差が増大していった．このため，偏差に基づいてゲインを調節する積分演算においてオーバフローが発生し，プラントの出力はモデルの出力に全く追従しなくなった．一方，VMMではバイアスw_1を設定した場合[14)]，浮動小数点演算の場合に近い応答が得られ，VMMの有効性が確認された．

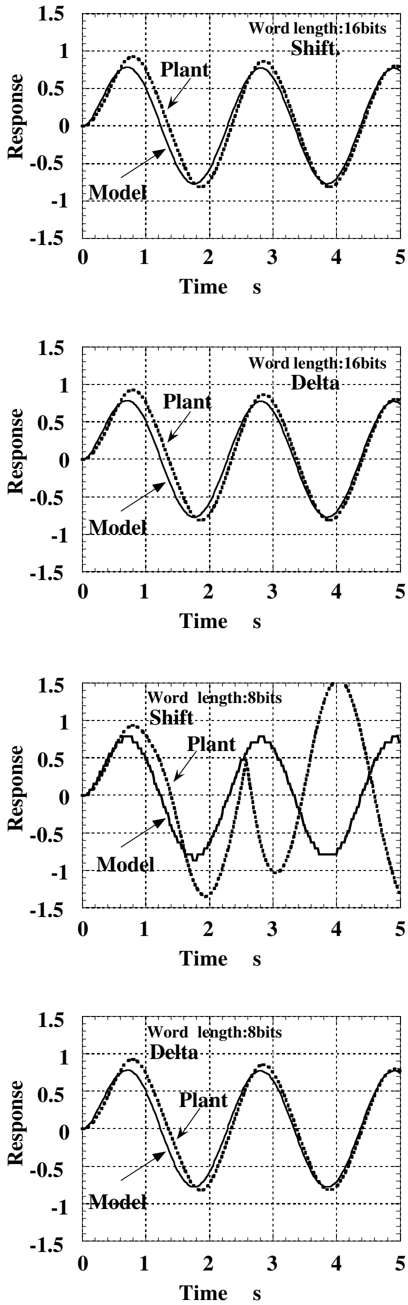


Fig. 10 Model and plant output

5. 結　　論

修正デルタ形式に基づいた制御アルゴリズムの実装手法であるVMMの有効性をMRACSに関して検証した．シミュレーションの結果，語長が短い場合でもVMMは従来のシフトオペレータに基づいた手法と比べて制御アルゴリズムを高精度に演算できることがわかった．

6. 参　考　文　献

[1] R. C. Agarwal and C. S. Burrus: New recursive digital filter having very low sensitivity and round-off noise, IEEE Trans. CAS, **22**, 12, (1971) 921.

[2] R. M. Goodall: High-speed digital controllers using an 8bit microprocessor, Software & Microsystems, **4**, 5/6, (1985) 246.

[3] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, IEEE Trans. on Automatic Control, **31**, 11, (1986) 1015.

[4] R. M. Goodall, “Minimisation of computation for digital controllers, Trans. Inst MC, **11**, 5, (1989) 218.

[5] R. M. Goodall: The delay operator z^{-1} - inappropriate for use in recursive digital filters?, Trans. Inst MC, **12**, 5, (1990) 246.

[6] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: Digital Estimation and Control -A Unified Approach-, New Jersey:Prentice-Hall, (1990)

[7] G. C. Goodwin and R. H. Middleton and H. V. Poor: High-Speed Digital Signal Processing and Control, Proc. The IEEE, **80**, 2, (1992) 240.

[8] 金井喜美雄，堀　憲之: ディジタル制御システム入門 —デルタオペレータの適用—, 槙書店, (1992)

[9] 青木　立，古川　勇二，諸貫　信行: 高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズムに関する研究（第１報）—修正デルタオペレータの提案—, 精密工学会誌, **62**, 3, (1996) 69.

[10] T. Aoki and N. Moronuki and Y. Furukawa: A study on Controlling Algorithm to Realize High-Speed & High-Accuracy Control Systems - Proposal of Modified Delta Operator -, J. of Robotics and Mechatronics, **9**, 6, (1997) 446.

[11] T. Aoki and Y. Furukawa: Proposal of Modified Delta Operation with V.M.M. and its Application to Controlling Algorithm in Fixed-Point Arithmetic, Proc. of Fourth Int. Conf. Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV’96), (1996) 2356.

[12] 青木　立，古川　勇二: 高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズムに関する研究（第２報）—変数変調デルタオペレーションの提案—, 精密工学会誌, **63**, 2, (1997) 213.

[13] 青木　立，古川　勇二: 高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズムに関する研究（第３報）—変数変調デルタオペレーションの最適制御系への適用—, 精密工学会誌, **63**, 5, (1997) 689.

[14] T. Aoki: Implementation of Modified Delta Form for Microprocessors using Fixed-Point Arithmetic, Proc. of American Control Conference, (1999) 4056.

[15] 青木　立: 修正デルタ形式に基づいたオブザーバの実機による検証 — 固定小数点マイクロプロセッサに適したデルタ形式 —, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, **1**, (2007) 15.

[16] T. Aoki: Implementation of Fixed-Point Control Algorithms Based on the Modified Delta Operator and Form for Intelligent Systems, J. of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, **11**, 6, (2007) 709.

[17] T. Aoki: A Reduction of Round-off Noise Based on the Modified Delta Form for Fixed-Point Arithmetic, Proc. 19th Int. Conf. on Noise and Fluctuation, (2007) 724.

[18] S. Sastry and M. Bodson: Adaptive control, Prentice-Hall, (1999)