

遅延を利用した同定入力信号の PE 次数増加方法

– 離散時間フーリエ変換の時間シフト特性の応用 –

The Increase Method of PE Degree of an Identification Input by a Delay – Applications of Time Shift Property of a Discrete-Time Fourier Transform –

青 木 立¹⁾

Tatsu AOKI¹⁾

Abstract:In the system identification of a process control, a plant is modeled as a first-order system or a second-order system with a dead time, and these models has identified by the step signal etc. The numbers of parameters identified on a first-order system and a second-order system are two and four, respectively. Since the degree of persistence of excitation of a step signal is one, these systems cannot identify by a step signal. In this paper, the increase method of the degree of persistence of excitation on the impulse signal, step signal, and sinusoidal signal is proposed. These signals are widely used as an identification input. The key idea is to apply the time shift property of a discrete time Fourier transforms to a persistence of excitation. When a signal is delayed, the Fourier transform of the delay signal becomes a product of that of the original signal and the oscillating term in the frequency domain in accordance with the amount of delay. Thus, the degree of persistence of excitation of an original signal increases by delaying a signal. As an illustration, the 5th ARX model is considered. The conventional sum of sinusoidal signals, the impulse signal, the step signal, and the sinusoidal signal are adopted as identification inputs. The proposed method was evaluated by considering RMSE on an estimated Bode diagram. Simulation results show that the proposed method can identify systems which cannot be identified by the conventional method under white noise. Therefore, the proposed method is useful on industrial application.

Keywords: Parameter estimation, Persistent excitation, Step response, ARX, Industrial process control

1. はじめに

制御系を設計するためには制御対象の数式モデルとそのパラメータを求める必要がある。このためには制御対象に種々の物理法則を適用し、制御対象を微分方程式により表現する。さらに、得られた微分方程式からラプラス変換により制御対象を伝達関数、すなわち、数式モデルとして表現する。伝達関数は部分分数分解により、1次系と2次系の伝達関数に分解でき、それらの並列接続として表現できる。1次系の極は常に実数になるため、逆ラプラス変換は指数関数になる。2次系の極が実数の場合、1次系と同様に逆ラプラス変換は指数関数になる。2次系の極が共役複素数の場合、複素指数関数と三角関数の間に成立するオイラーの公式から逆ラプラス変換は三角関数になる。時間領域における三角関数は振動を表現している。そこで、高次系で表現される制御対象の応答には多数の指数関数及び三角関数の応答が含まれる。次に、制御対象に信号を入力し、得られた入出力データから数式モデルのパラメータを決定する。高次系の制御対象は多数の振動モードを有しており、これらのモードを検出するためには振動モード全てを励起しなければならない。そこで、同定入力に含まれる異なった周波数の個数が重要になる。この値はPE(Persistently Exciting)性の次数と呼ばれる[1-2]。ここで、同定対象がゲインのみの0次系について考える。このモデル

のパラメータ、すなわち、ゲインを同定するためにはステップ信号を入力し、出力の振幅を測定すればよい。ステップ信号のPE性の次数は1であり、同定対象のパラメータ数と同一であるため同定可能になる。そこで、同定入力のPE性の次数は同定対象のパラメータ数より大きく設定する必要がある。さらに、同定入力は同定対象に適した信号を選定しなければならない。入力した信号の種類により大きな振動が発生し、同定対象に損傷を与えたり、大型の構造物では危険な状態になる。プロセス制御における同定ではプラントをむだ時間+1次系やむだ時間+2次系としてモデル化し、ステップ信号などにより同定している[3]。ステップ応答により制御対象のオーバーシュート、立ち上がり時間、整定時間、むだ時間などが得られる。パラメータの個数は1次系では2になり、2次系では4になるため、PE性の次数が1であるステップ信号では同定できない。

本研究では、同定入力として広く用いられているインパルス信号、ステップ信号、正弦波信号についてPE性の次数を増加させる手法の開発を目的とする。第2章では提案手法について、第3章では提案手法の検証について述べる。検証には5次系のARXモデルを用い、最小2乗法によりパラメータを推定する。推定パラメータに基づいたボード線図に関して2乗平均平方根誤差(Root Mean Square Error, RMSE)により評価する。第4章では結論を述べる。

1) 東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科 電気電子工学コース

2. 提案手法

2.1 同定入力に関する PE 性の次数

システム同定では、同定対象が有する振動モードを全て励起する必要があり、同定信号を適切に選定する必要がある。この選定の指針になるのが同定信号に関する PE 性の次数である。自己相関関数を以下に示す。

$$C(d) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(n)u(n+d) \quad (1)$$

ここで、 $u(n)$ は周期信号、 d は相関パラメータ、 N はデータ個数とする。なお、 $u(n)$ が非周期信号のときには次式を用いる。

$$C(d) = \frac{1}{N-d} \sum_{n=1}^{N-d} u(n)u(n+d) \quad (2)$$

信号 $u(n)$ に関する PE 性の次数は式 (1)、または、式 (2) に示す自己相関関数により構成される自己相関行列から求まる。

$$R(m) = \begin{pmatrix} C(0) & C(1) & \cdots & C(m-1) \\ C(1) & C(0) & \cdots & C(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(m-1) & C(m-2) & \cdots & C(0) \end{pmatrix} \quad (3)$$

m の初期値を 2 として求まる自己相関行列 $R(2)$ が正則かどうか計算する。正則である場合には m を 3 に設定して得られた行列が正則かどうかを確認する。正則ではない場合には PE 性の次数は 2 になる。正則の場合には同様の計算を自己相関行列が正則でなくなるまで続けることにより PE 性の次数が求まる。

2.2 信号の遅延を用いた PE 性の次数の増加

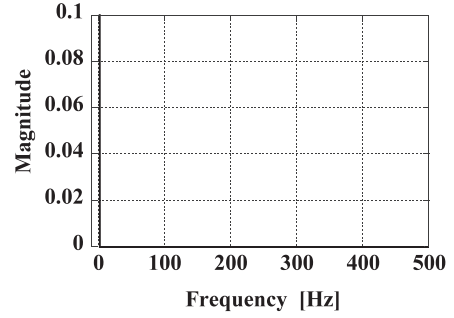
同定入力 $u(n)$ の PE 性の次数を増加させるためには入力信号に含まれる振動モード数を増加させればよい。このために同定入力 $u(n)$ の離散時間フーリエ変換を考える。

$$U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) e^{-j\omega n} \quad (4)$$

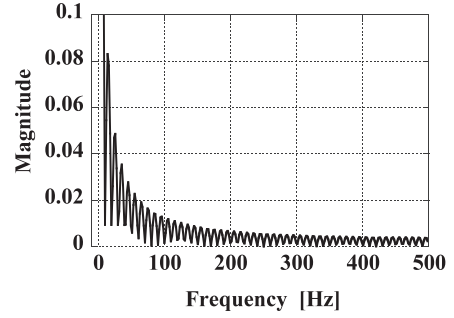
式 (4) に示す離散時間フーリエ変換において n_d だけ信号 $u(n)$ を遅延させると

$$u(n - n_d) = U(\omega) e^{-i\omega n_d} \quad (5)$$

となる。式 (5) から $u(n)$ が有している振動モードに加え、 $e^{-i\omega n_d}$ の振動モードが加わる。図 1 及び図 2 にサンプリング時間 T を 1ms、データ数 N を 512、 n_d を 100 に設定したときのステップ信号及び 45Hz の正弦波のパワースペクトラムを示す。図 1 及び図 2 から周波数領域において式 (5) の $e^{-i\omega n_d}$ から求まる 0.1s の遅延に対応した 10Hz の振動が発生している。このパワースペクトラムの振動がナイキスト周波数の 500Hz まで続くことによりパワースペクトラムが拡大する。表 1 にこれらの信号について、MATLAB System Identification Toolbox に付属している *pexcit* を用いて PE 性の次数を求めた結果を示す。表 1 から信号を遅延することにより PE 性の次数が増加することがわかる。

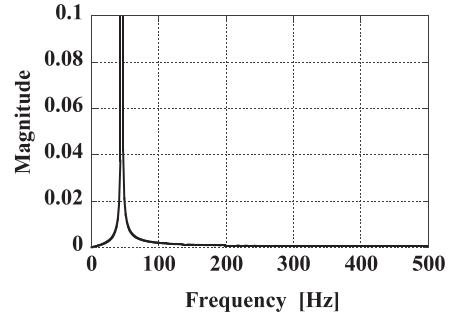


(a) Original signal

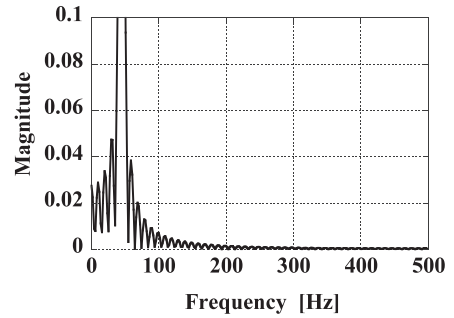


(b) Delay signal

Fig. 1 Power spectrum of a step signal



(a) Original signal



(b) Delay signal

Fig. 2 Power spectrum of a sinusoidal signal

Table 1 The degree of persistence of excitation.

Input	Delay (s)	
	0	0.1
Impulse	1	50
Step	1	50
Sinusoidal signal	2	50

3. 提案手法の有効性の検証

3.1 同定対象

インパルス信号, ステップ信号, 正弦波信号単独では同定できない 5 次系で表現される $G(s)$ について考える.

$$G_0(s) = \frac{100}{s + 100} \quad (6)$$

$$G_1(s) = \frac{0.5\omega_1^2 + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} \quad (7)$$

$$G_2(s) = \frac{-0.01\omega_2^2 + \omega_2^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} \quad (8)$$

$$G(s) = G_0(s)G_1(s)G_2(s) \quad (9)$$

$\{ \zeta_1 \ \omega_2 \ \zeta_2 \ \omega_2 \} = \{ 0.4 \ 50\text{rad/s} \ 0.7 \ 20\text{rad/s} \}$
式 (9) に示す $G(s)$ を 0 次ホールドにより離散化し, 以下に示す ARX モデルにより表現する.

$$A(z^{-1})y(n) = z^{-k}B(z^{-1})u(n) + w(n) \quad (10)$$

ここで, $w(n)$ はホワイトノイズ, k は ARX の入力に対する出力の遅延とする

3.2 同定データの取得

シミュレーションは MATLAB/Simulink を用いて行い, サンプル周期 T は 1ms に設定する. 正弦波の PE 性の次数は 2 なので, 5 次系のパラメータ 10 個を同定するためには, 5 個の異なる周波数の正弦波を合成する必要がある. なお, ノイズによる ARX モデルの DC ゲインの変動を抑制するため, 一定値 1 を加える. これらの計 6 個の信号の平均を従来手法に基づいた同定入力とする. なお, 周波数が 1 Hz, 20 Hz, 50 Hz, 70 Hz, 150 Hz, 振幅が 1 の正弦波を用いる.

$$u(n) = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^5 \sin(\omega_i nT - 100T) + 1 \right) \quad (11)$$

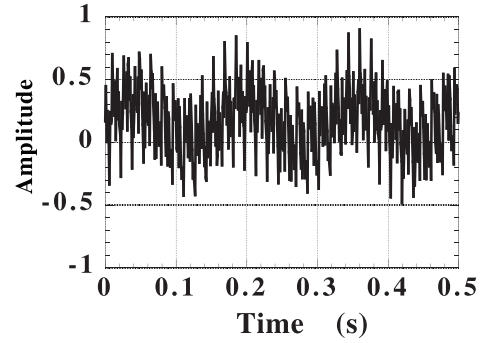
提案手法に基づいた同定入力を以下に示す. ここで, 信号の遅延時間は $100T$ に設定する. 従来手法の場合と同様の理由により一定値 1 を加え, 平均した信号を同定入力とする.

$$u(n) = \frac{1}{2} (\delta(nT - 100T) + 1) \quad (12)$$

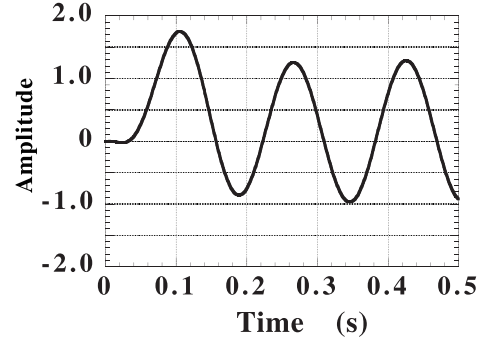
$$u(n) = \frac{1}{2} (\bar{u}(nT - 100T) + 1) \quad (13)$$

$$u(n) = \frac{1}{2} (\sin(\omega nT - 100T) + 1) \quad (14)$$

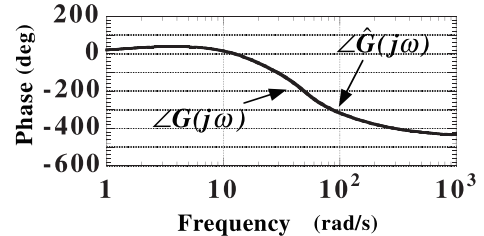
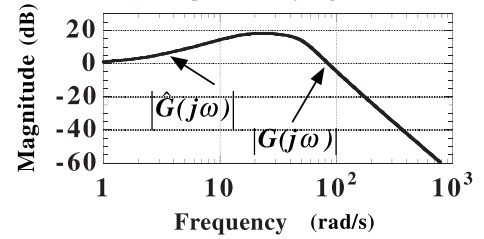
取得データ数 N は $t = 0$ s のデータも含め 501 とする. なお, 式 (10) に示す ARX モデルにおけるホワイトノイズ $w(n)$ は Simulink Uniform Random Number ブロックにより発生させる. ブロックパラメータは最大値 $1e-6$, 最小値 $-1e-6$, サンプル周期 T は 1ms に設定する. MATLAB System identification Toolbox ARX を用いてパラメータを推定する. 推定した ARX モデルから得られる伝達関数を MATLAB $d2c$ により連続時間系の伝達関数に変換し, ボード線図を求める. 図 3 から図 6 に合成正弦波, 遅延したインパルス信号, ステップ信号, 正弦波信号を同定入力としたときの推定ボード線図を示す. また, ノイズがないときの入出力信号も示す.



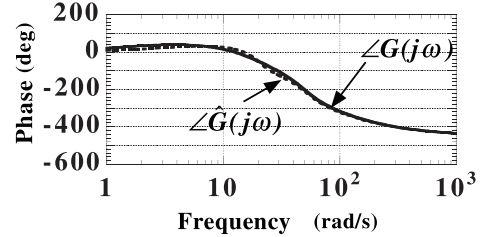
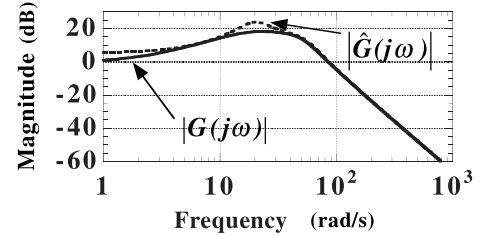
(a) Sum of sinusoidal inputs



(b) Output to delay signal

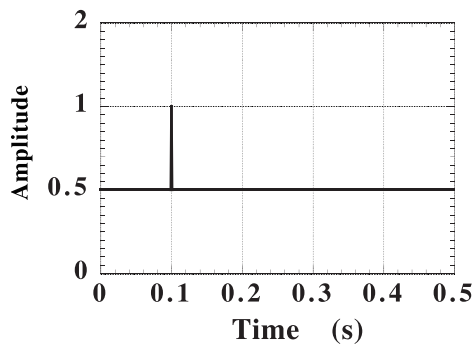


(c) Estimated Bode diagram without white noise

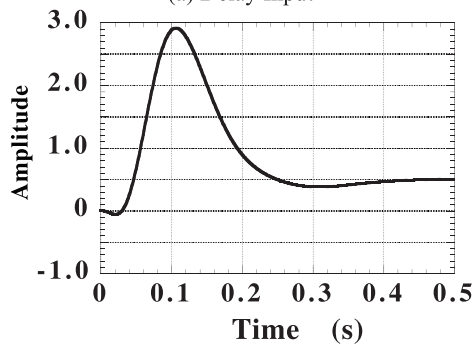


(d) Estimated Bode diagram under white noise

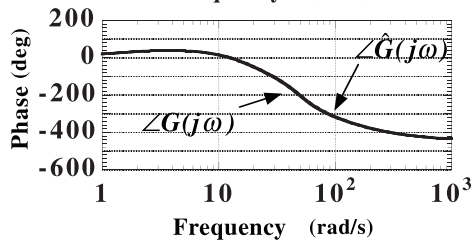
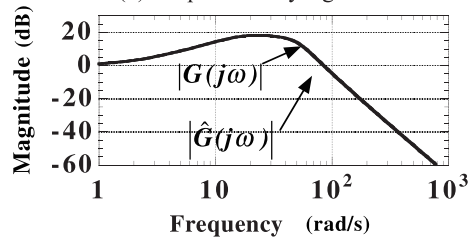
Fig. 3 Bode diagrams by using sum of sinusoidal signals



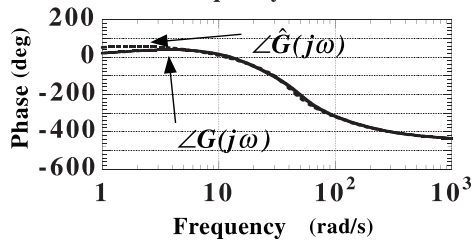
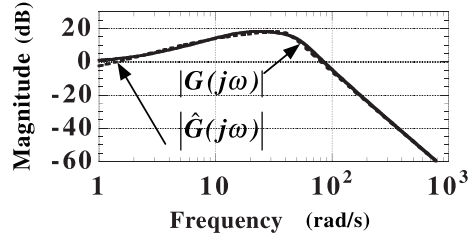
(a) Delay Input



(b) Output to delay signal

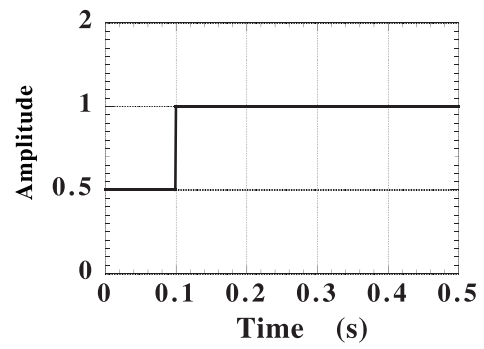


(c) Estimated Bode diagram without white noise

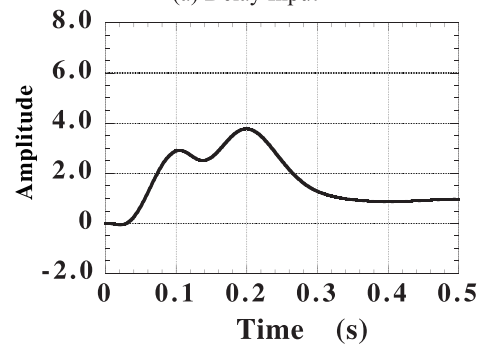


(d) Estimated Bode diagram under white noise

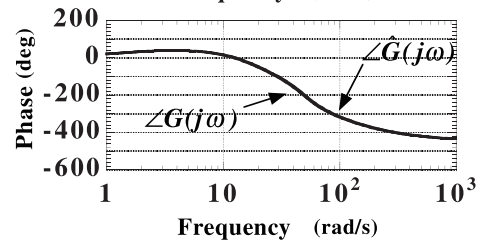
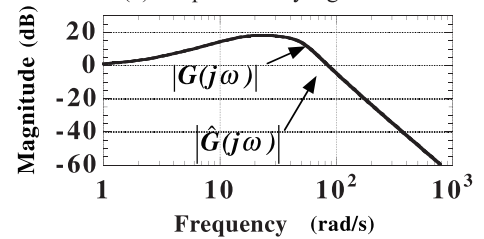
Fig. 4 Bode diagrams by using delay impulse signal



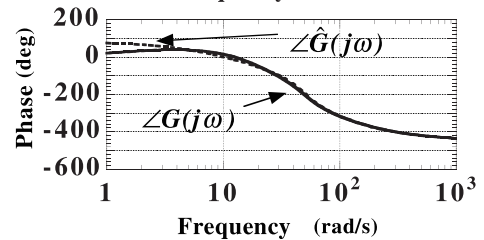
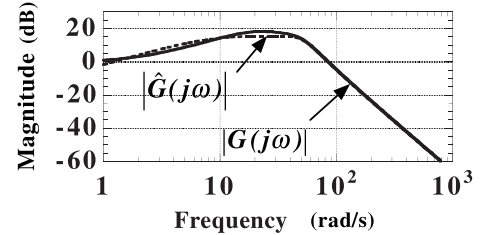
(a) Delay Input



(b) Output to delay signal

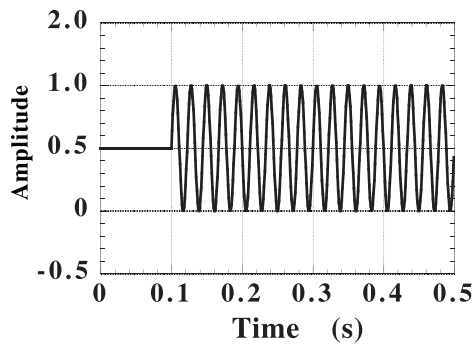


(c) Estimated Bode diagram without white noise

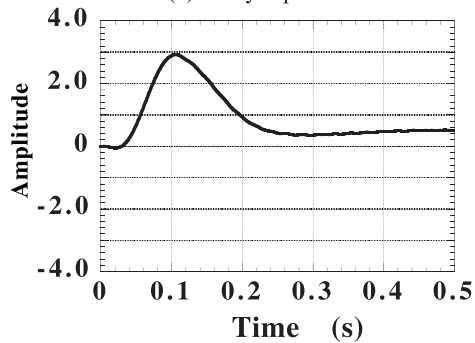


(d) Estimated Bode diagram under white noise

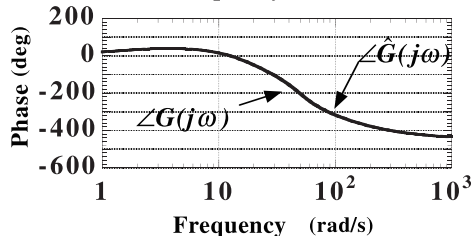
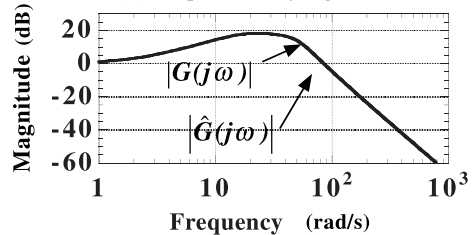
Fig. 5 Bode diagrams by using delay step signal



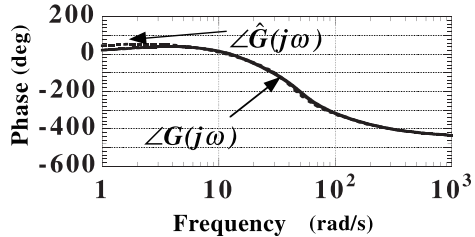
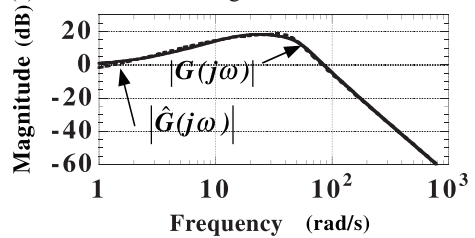
(a) Delay Input



(b) Output to delay signal



(c) Estimated Bode diagram without white noise



(d) Estimated Bode diagram under white noise

Fig. 6 Bode diagrams by using delay sinusoidal signal

Table 2 RMSE on an estimated Bode diagram without noise

Identification input	Gain (dB)	Phase (deg)
Sum of sinusoidal signals	5.5566×10^{-7}	2.5275×10^{-6}
Delay impulse signal	1.9657×10^{-4}	1.1555×10^{-3}
Delay step signal	2.2072×10^{-4}	1.5779×10^{-3}
Delay sinusoidal signal	2.1770×10^{-5}	1.3257×10^{-4}

Table 3 RMSE on an estimated Bode diagram under noise

Identification input	Gain (dB)	Phase (deg)
Sum of sinusoidal signals	2.2102	10.446
Delay impulse signal	1.0498	11.806
Delay step signal	1.3367	17.204
Delay sinusoidal signal	0.8492	9.989

3.3 同定結果

式 (9) に示す伝達関数から求めたボード線図と推定ボード線図の 2 乗平均平方根誤差 (Root Mean Square Error, RMSE) により評価する.

$$\Delta|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (|G(j\omega_i)| - |\hat{G}(j\omega_i)|)^2}{100}} \quad (15)$$

$$\Delta\angle G(j\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (\angle G(j\omega_i) - \angle \hat{G}(j\omega_i))^2}{100}} \quad (16)$$

なお, 評価データは 1 rad/s から 1000 rad/s まで対数目盛で等間隔になる 100 点とする. 表 1 及び表 2 にノイズがある場合とない場合の式 (15) 及び式 (16) により求めた RMSE をそれぞれ示す. ノイズがない場合, 従来手法では同定が不可能な信号により高精度にパラメータが推定できていた. このことは図 3 から図 6 からも確認できる. ノイズがある場合, 従来手法である合成正弦波よりも遅延した正弦波を使用した方が良い結果が得られた.

4. 結論

インパルス信号, ステップ信号, 正弦波信号を遅延することにより PE 性の次数を増加できることがわかった. その結果, これらの信号単体では同定できないシステムのパラメータを推定することが可能になった. 提案手法はノイズが混入した場合でもパラメータが推定可能なため, 提案手法はプロセス制御をはじめ産業応用上有用と考える.

5. 参考文献

- [1] 足立 修一: MATLAB による制御のためのシステム同定, 東京電機大学出版局, pp. 17-32, 1997
- [2] Ljung, L: System Identification - Theory for the User - Second Edition, Prentice-Hall, pp. 412-421, 1999
- [3] Y. Du, J. Tsai, H. Patil, L. Shieh et al.: Indirect identification of continuous-time delay systems from step responses, J. Applied Mathematical Modelling, 35, pp. 594-611, 2011