NK に直結したシーケンス体系について

On a Sequent System Directly Linked to NK

中西 泰雄

Yasuo nakanishi

1. はじめに

Gentzen の LK と NK は記号論理における有名な論理体系であり，いずれも有用である．NK は我々が実際に用いる推論を比較的自然に定式化したものであるが，証明構造の分析には向かない面もある．一方，LK をはじめとするシーケンス体系は推論の構造を分析するのには便利であるが，推論の各時点における「仮定」をその都度書き出すことなどから，実際の推論に用いることは困難である．そこで，NK との簡単な互換手続きのあるシーケンス体系が望まれるが，LK 自身は NK と直結はしていない．一般に，LK の証明を NK に書き換えることは容易ではない．そこで本稿では，NK に比較的容易に書き換えられるようなひとつのシーケンス体系を提案する．本体系は，例えば NK で書かれた証明の効率化を論じる場合などにに役立つ可能性がある．すなわち，NK で書かれた証明よりも本シーケンス体系の証明の方が構造を分析しやすいため，その効率化を議論するには適している．そしてもし本シーケンス体系において証明の効率化の一般論ができれば，それを NK に翻訳することにより，NK の証明の効率化の手法を得ることができる．

2. 述語論理の言語

本稿では 1 階の述語論理を用いて，NK に直結したシーケンス体系の説明を行う．そこでまず，本稿で使用する述語論理の言語を規定する．

まず，原始記号として以下のものを定める．

(1) 論理記号：$\rightarrow, \wedge, \vee, \sim, \forall, \exists$　(2) 自由変数：$a_1, a_2, a_3, \cdots$　(3) 束縛変数：$x_1, x_2, x_3, \cdots$
(4) 個体記号：$c_1, c_2, c_3, \cdots$　(5) 関数記号：$f_1, f_2, f_3, \cdots$　(6) 述語記号：$p_1, p_2, p_3, \cdots$

ここで，(5) の各 f_i には 1 以上の自然数 n_i が 1 つづつ対応しており，f_i は n_i 変数関数記号と呼ばれる．(6) に関しても同様である．以上の記号の個数は高々可算個とする．

次に「項」を定義する．

(1) 自由変数及び個体記号は項である．
(2) f が n 変数関数記号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ が n 個の項ならば，$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ も項である．
(3) 以上によって項とされるもののみが項である．

更に,「論理式」を定義する．

(1) p が n 変数述語記号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ が n 個の項ならば，$p(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は論理式である．
(2) A, B が論理式なら，$A \rightarrow B, A \wedge B, A \vee B, \sim A$ はすべて論理式である．
(3) $F(a)$ が自由変数 a を含み束縛変数 x を含まない論理式なら，$\forall x(x)$ 及び $\exists x F(x)$ は論理式
　　である．但し，$F(x)$ は $F(a)$ の中のすべての a に x を代入した結果とする．

以下では，論理式を $A, B, C, \cdots, A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ 等によって表わし，自由変数 a を含む論理式を $F(a)$ 等によって表わす．

LK 等の体系においては，さらに「シーケンス」が定義される．$A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n$ が論理式であるとき，

$$A_1,\ A_2, \cdots,\ A_m \Longrightarrow B_1,\ B_2, \cdots,\ B_n$$

都立産業技術高専　一般科

なる形をシーケンスという．意味論的には,「(A_1かつ A_2かつ…かつ A_m)ならば(B_1または B_2または…または B_n)」を表わす．ただし，左辺や右辺は空であっても良い．以下において有限個（0個を含む）の論理式の列を記号 $\Gamma, \Delta, \cdots$ によって表わす．従って，一般にシーケンスは $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ と表わすことができる．

以上の言語を用いて NK と LK を定義することができるが，その証明の定義，推論規則等は通常通りとし，詳細は省略する．

3. NK に直結したシーケンス体系

本節では，NK に直結したシーケンス体系（以下 S と呼ぶ）を構成する．S の証明図は LK と同様の形式をとるが，そのシーケンスは右辺が高々 1 個の論理式からなるものに限られる．推論規則も LK の推論規則が適用されるが，右辺に 2 個以上の論理式が現われる推論は許されない．このような体系は，そのままでは直観論理体系 LJ になってしまうが，更に「二重否定除去」の推論規則を付け加える．結果として，S の推論規則は以下のようになる．

(左増) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Phi}{A,\Gamma \Longrightarrow \Phi}$　　(右増) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow A}$

(左減) $\dfrac{A,\ A,\Gamma \Longrightarrow \Phi}{A,\Gamma \Longrightarrow \Phi}$　　(左換) $\dfrac{\Gamma,\ A,\ B,\Pi \Longrightarrow \Phi}{\Gamma,\ B,\ A,\Pi \Longrightarrow \Phi}$

(cut) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \quad A,\Pi \Longrightarrow \Phi}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Phi}$

(左 ～) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A}{\sim A,\Gamma \Longrightarrow}$　　(右 ～) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow \sim A}$

(右 ～～ 除) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \sim\sim A}{\Gamma \Longrightarrow A}$

(左 ∧) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Phi}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Phi}$　$\dfrac{B,\Gamma \Longrightarrow \Phi}{A \wedge B,\Gamma \Longrightarrow \Phi}$　　(右 ∧) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \quad \Pi \Longrightarrow B}{\Gamma,\Pi \Longrightarrow A \wedge B}$

(左 ∨) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Phi \quad B,\Pi \Longrightarrow \Phi}{A \vee B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Phi}$　　(右 ∨) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B}$　$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B}$

(左 →) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \quad B,\Pi \Longrightarrow \Phi}{A \rightarrow B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Phi}$　　(右 →) $\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \rightarrow B}$

(左 ∀) $\dfrac{F(t),\Gamma \Longrightarrow \Phi}{\forall x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Phi}$
(tは任意の項)

(右 ∀) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow F(a)}{\Gamma \Longrightarrow \forall x F(x)}$
(aは下式内にない自由変数)

(左 ∃) $\dfrac{F(a),\Gamma \Longrightarrow \Phi}{\exists x F(x),\Gamma \Longrightarrow \Phi}$
(aは下式内にない自由変数)

(左 ∃) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow F(t)}{\Gamma \Longrightarrow \exists x F(x)}$
(tは任意の項)

但し，上記において Γ，Π は任意の有限個（0個を含む）の論理式の列，Φ は任意のひとつの論理式または空列，A，B は任意の論理式，$F(a)$ は自由変数 a を含み束縛変数 x を含まない任意の論理式を表わす．

4. S と LK

本節では，S と LK の証明間の書き換え方法を説明する．LK は代表的なシーケンス体系であり，いわゆる cut elimination theorem に見られるような優れた性質を持っている．従って，その LK と S との書き換え手続きを調べておくことは，S の応用に際し有益と考えられる．

まず，S の証明はそのままで殆ど LK の証明と見なすことができる．異なるのは（右 $\sim\sim$ 除）の推論のみであるが，この推論規則は LK の推論規則によって次のように実現することができる．

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \sim\sim A \qquad \dfrac{\dfrac{A \Longrightarrow A}{\Longrightarrow A, \sim A}}{\sim\sim A \Longrightarrow A}}{\Gamma \Longrightarrow A}$$

S の証明図における（右 $\sim\sim$ 除）の推論をすべて上の型の推論で置き換えることにより，LK の証明図が得られる．

次に，LK の証明図を S の証明図に書き換える方法を示す．そこで今，LK の任意の証明が与えられたとする．その証明図内の各シーケンスは，

$$A_1,\ A_2,\cdots,\ A_m \Longrightarrow B_1,\ B_2,\cdots,\ B_n$$

の形をしている．そこでまず，その各々のシーケンスを

$$A_1,\ A_2,\cdots,\ A_m,\ \sim B_1,\ \sim B_2,\cdots,\ \sim B_n \Longrightarrow$$

で置き換える．こうして出来た図は勿論まだ S の証明図にはなっていないが，もとの LK の証明図において左辺だけに関係する推論，すなわち，（左増），（左減），（左換），（左 $\wedge$），（左 $\vee$），（左 $\forall$），（左 $\exists$）が行われた部分に限っては，新しい図において S の推論と見なすことができる．例えば LK の（左 $\vee$）による推論

$$\dfrac{A,\Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad B,\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B,\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

という推論は，新しい図において

$$\dfrac{A,\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow \qquad B,\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow}{A \vee B,\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow}$$

と書かれる（$\sim\Delta$ は，論理式列 Δ の各論理式に $\sim$ を付けることにより得られる列）が，これは S の（左 $\vee$）規則によって許される推論である．そこで今度は，右辺が関係する推論を見てみよう．LK の（左 $\rightarrow$）規則による推論

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \qquad B,\Pi \Longrightarrow \Lambda}{A \rightarrow B,\Gamma,\Pi \Longrightarrow \Delta,\Lambda}$$

という推論は，新しい図において

$$\dfrac{\Gamma,\ \sim\Delta,\ \sim A \Longrightarrow \qquad B,\Pi,\ \sim\Lambda \Longrightarrow}{A \rightarrow B,\Gamma,\Pi,\ \sim\Delta,\ \sim\Lambda \Longrightarrow}$$

と書かれるが，これは S の推論そのものではない．しかしこの推論は，S の推論規則を使って次のように実現することができる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \sim\Delta,\ \sim A \Longrightarrow}{\cdots\cdots}}{\sim A,\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow}}{\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow \sim\sim A}}{\Gamma,\ \sim\Delta \Longrightarrow A} \qquad B,\Pi,\ \sim\Lambda \Longrightarrow}{\dfrac{A \rightarrow B,\Gamma,\ \sim\Delta,\Pi,\ \sim\Lambda \Longrightarrow}{\cdots\cdots}}}{A \rightarrow B,\Gamma,\Pi,\ \sim\Delta,\ \sim\Lambda \Longrightarrow}$$

同様のことを，他の右辺が関係する推論，すなわち LK の（右増），（右減），（右換），(cut)，（左 $\sim$），（右 $\sim$），（右 $\wedge$），（右 $\vee$），（右 $\rightarrow$），（右 $\forall$），（右 $\exists$）についても確認することができる．こうして出来た推論図は $A,\ \sim A \Longrightarrow$ という型のシーケンスを始式として $\sim B \Longrightarrow$ という型のシーケンスを終式とする推論図であるが，前者を $A \Longrightarrow A$ から S の推論により導き，後者から S の推論により $\Longrightarrow B$ を導けば，S の証明図が完成する．

以上に述べた S と LK の証明の書き換え法から導かれることのひとつは，LK と同様，S においても cut elimination theorem が成り立つということである．すなわち，S において証明可能なシーケンスは，S において (cut) を用いずに証明可能であることが，次のようにして分かる．まず，そのシーケンスの S における証明図を上記の方法で LK の証明図に書き換える．次に，LK における cut elimination theorem により，(cut) のない LK の証明図を得る．更にそれを上記の方法で S の証明図に書き換える．上記の方法によれば，得られた S の証明図に (cut) は現れない．以上により，与えられたシーケンスは S において (cut) を用いずに証明可能となる．

5. S と NK

本節では，S と NK の証明間の書き換え方法を説明する．

まず，NK の証明図から S の証明図をつくる方法を考える．NK の証明図における各論理式 Φ に対し，Φ を導くための仮定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を用いてシーケンス $A_1, A_2, \cdots, A_m \Longrightarrow \Phi$ をつくり（但し，Φ が矛盾記号 $\perp$ の場合にはシーケンスの右辺は空列とする），Φ をこのシーケンスに置き換える．こうして出来た図はまだ S の証明図にはなっていないが，もとの NK の証明図において（$\sim$ 導入），（$\wedge$ 導入），（$\vee$導入），（$\rightarrow$ 導入），（$\forall$ 導入），（$\exists$ 導入）および（$\sim\sim$ 除去）による推論が行われた部分は，新しい図において S の推論と見なすことができる．それ以外の推論の例として，NK の（$\rightarrow$ 除去）による推論を見てみよう．この規則による推論部分は，

$$\dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

という形をしており，この部分をシーケンスに置き換えたときには

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Pi \Longrightarrow A \rightarrow B}{\Gamma, \Pi \Longrightarrow B}$$

という形なるが，これは S の推論そのものではない．しかしこの推論は，S の推論規則を使って次のように実現することができる．

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \Longrightarrow A \rightarrow B \qquad \dfrac{A \Longrightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{B \Longrightarrow B}{A,\, B \Longrightarrow B}}{B,\, A \Longrightarrow B}}{A \rightarrow B,\, A \Longrightarrow B}}{\Pi,\, A \Longrightarrow B}}{\cdots\cdots}}{A, \Pi \Longrightarrow B}}{\Gamma, \Pi \Longrightarrow B}$$

同様にして，（$\sim$ 除去），（$\wedge$ 除去），（$\vee$除去），（$\forall$ 除去），（$\exists$ 除去）による推論が行われた部分に対応する部分も，S の推論で実現することができる．

次に，S の証明図から NK の証明図をつくる方法を述べる．方針としては，S の証明図のシーケンスを始式から終式に向かって見ていきながら，次のようにして NK の推論図を順次かき足していく．S の各シーケンス $A_1, A_2, \cdots, A_m \Longrightarrow \Phi$ に対し，それまでに構成した NK の推論図を部分として含み，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ を仮定として Φ（空列の場合は矛盾記号 $\perp$）を結論とするような NK の推論図を構成する．ただし，NK の推論図において仮定 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ のそれぞれが出現する位置および回数（0回を含む）には制限はないものとする．以下，具体例を用いて説明する．S の証明図の最初の部分の例として，次のような形を考える．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Longrightarrow A}{A \wedge B \Longrightarrow A}}{\Longrightarrow (A \wedge B) \rightarrow A} \qquad \dfrac{C \Longrightarrow C}{C \Longrightarrow C \vee D}}{C \Longrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (C \vee D)} \tag{5.1}$$

$$\vdots$$

まず，この図の左上のシーケンス $A \Longrightarrow A$ に対し，A を仮定とし A を結論とする NK の推論図，すなわち次のような，A のみからなる推論図をかく．

$$A$$

図 (5.1) の次のシーケンスは $A \wedge B \Longrightarrow A$ であるから，上の図にかき加えることによって次のように $A \wedge B$ を仮定として A を結論とするような NK の推論図を得る．

$$\dfrac{A \wedge B}{A}$$

図 (5.1) の次のシーケンスは $\Longrightarrow (A \wedge B) \rightarrow A$ であるから，上の図にさらにかき加えることによって次のように仮定なしで $(A \wedge B) \rightarrow A$ を結論とするような NK の推論図を得る．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{A \wedge B}}{A}\ (1)}{(A \wedge B) \rightarrow A} \tag{5.2}$$

一方，図 (5.1) の右上のシーケンス $C \Longrightarrow C$ には C のみからなる NK の推論図が対応し，図 (5.1) の次のシーケンス $C \Longrightarrow C \lor D$ に対応して次の推論図が得られる．

(5.3)
$$\frac{C}{C \lor D}$$

図 (5.1) の最後のシーケンスは $C \Longrightarrow ((A \land B) \to A) \land (C \lor D)$ であるが，これに対応する NK の推論図は，上式に対応する NK の推論図である図 (5.1) と図 (5.2) を組み合わせ，更にかき足すことによって次のようにつくられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{A \land B}}{A}\;(1)}{(A \land B) \to A} \qquad \dfrac{C}{C \lor D}}{((A \land B) \to A) \land (C \lor D)}$$

このように，S の推論の上式に対応する NK の推論図を用いて下式に対応する NK の推論図をつくるという操作を繰り返し，S の推論図の終式 $\Longrightarrow E$ に到ったときには，仮定なしで E を結論とする NK の証明図を得ることになる．問題は，各段階で常にこの作業が可能であるかどうかである．例として，S における (左 $\to$) 規則による推論

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad B, \Pi \Longrightarrow \Phi}{A \to B, \Gamma, \Pi \Longrightarrow \Phi}$$

で考えてみる．この上式まで作業が進んだ時点では，Γ を仮定として B を結論とする S の証明図と，B, Π を仮定として Φ を結論とする証明図が得られているので，それぞれ

$$\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}B \quad \Pi \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

で表わす．ここでは，右の図において仮定 B が一回だけ現われる例を示しているが，実際の証明図における仮定 B の出現回数には制限がないため，複数回出現するかも知れないし一度も出現しないかも知れない．次に下式に進み，$A \to B, \Gamma, \Pi$ を仮定として Φ を結論とする証明図を作るには，次のようにすればよい．

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad A \to B}{B} \quad \Pi \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

ただし，この図において B を導いている推論部分は，前段階において仮定 B が複数個あった場合はその各々の B の上部にかかれることになるし，仮定 B が 0 個であった場合には不要となる．S の他のすべての推論規則についても，同様の操作を行うことができる．すなわち，上式に対応する NK の推論図を用いて，下式に対応する NK の推論図をつくることができる．以下，S の各々の推論規則に対応する NK の推論図を示す．

(右増)
$$\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{A}\end{array}$$

(cut)
$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \quad \Pi \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

(左 ~)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \sim A}{\bot}$$

(右 ~)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(1)}{A} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\sim A}\;(1)$$

(右 ~~ 除)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \sim\sim A\end{array}}{A}$$

(左 ∧)
$$\begin{array}{c}\dfrac{A \land B}{A} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \Phi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\dfrac{A \land B}{B} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \Phi\end{array}$$

(右 ∧)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \land B}$$

(左 ∨)

$$\dfrac{A \lor B \qquad \begin{array}{c} \overset{(1)}{A} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \Phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{(1)}{B} \quad \Pi \\ \vdots \\ \Phi \end{array}}{\Phi}\,(1)$$

(右 ∨)

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \lor B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \lor B}$$

(左 ∀)

$$\begin{array}{c} \dfrac{\forall x F(x)}{F(t)} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \Phi \end{array}$$

(右 ∀)

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ F(a) \end{array}}{\forall x F(x)}$$

(左 ∃)

$$\dfrac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c} \overset{(1)}{F(a)} \quad \Gamma \\ \vdots \\ \Phi \end{array}}{\Phi}\,(1)$$

(右 ∃)

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ F(t) \end{array}}{\exists x F(x)}$$

尚，S のシーケンスに対応する NK の推論図において，それぞれの仮定の出現する位置および回数に制限がないことから，(左増)，(左減)，(左換) の規則による推論に関しては，対応する NK の推論図を変化させる必要はない．

6. おわりに

LK 同様，S も推論の理論的研究のためのものであって，実用性を目指したものではない．NK と S の証明の互換性は，それが理論的に可能であるということに意味があるのであって，具体的な証明全体を実際に S で書き下すには，膨大な手間がかかる．実用的見地からするとやはり NK が優れているのであるが，その NK の証明構造を分析し，証明効率化の一般論等を議論するのに際しては，本稿で提案したシーケンス体系 S が有用となる可能性がある．

7. 参考文献

[1] 松本　和夫：数理論理学，共立，1970

[2] N.W. テニント：自然演繹の論理学，八千代，1981

[3] 竹内　外史，八杉　満利子：証明論入門，共立，1988

[4] 日本数学会：岩波数学辞典，第 3 版，岩波，1985