

固定小数点ノッチフィルタの特性に関する検証

– シフトモデルとデルタモデルの比較 –

Verification on the Characteristic of a Fixed-Point Notch Filter

– Comparison of a Shift Model and a Delta Model –

青 木 立¹⁾

Tatsu AOKI¹⁾

Abstract:In recent years, a mechanical system requires various functions, such as high speed, light weight, energy saving, and low cost. As a result, stiffness of a component becomes low, and the whole mechanical system vibrates easily and mechanical resonance occurs. Since this compliance often reduces stability margins, feedback gain is necessary to reduce. As a result, machine performance becomes poor. The simplest way to reduce mechanical resonance is to use a notch filter that attenuates only a resonance frequency. On the other hand, FPGA used for an artificial satellite etc. requires low power consumption and low cost severely. The power consumption is greatly saved by converting from floating-point arithmetic to fixed-point arithmetic. Thus, fixed-point implementation of a filter is desired. In this paper, the calculation accuracy of the shift model and the delta model of a notch filter are compared. The root mean square error between a double precision floating-point arithmetic and fixed-point arithmetic on a Bode diagram is considered as an evaluation index. From these results, the word length which can perform calculation of a filter with sufficient accuracy is derived. In order to verify the derived result, PID control of a DC motor using a notch filter is considered. Since there is compliance in a DC motor, a damped oscillation occurs without a notch filter. The effectiveness of a proposed fixed-point filter is verified by the step and sinusoidal response on a PID control system.

Keywords: Notch filter, Fixed-point arithmetic, Delta operator, PID control, Word length, Implementation

1. はじめに

近年の機械システムには、軽量化、高速化、省エネルギー、低コストなどが要求される。これらを実現するためには機械システムの構成要素を軽量化する必要がある。この軽量化により機械の剛性が低くなり、システム全体が振動し易くなる。例えば、工作機械に振動が発生すれば、望まれる加工精度を達成することができない。また、機械システムの制御には、振動せずに目標とする位置や速度を高速に達成することが要求される。このためには、フィードフォワードやフィードバックゲインをできるだけ高く設定する必要がある。しかし、低剛性の機械システムでは、コンプライアンスに起因する振動が発生するため、ゲインを十分に高く設定できない。この問題を解決する手法は種々提案されている。例えば、オブザーバにより実機の状態変数を推定し、推定した状態変数に基づいて状態フィードバックを行うことにより振動の原因となる極を除去する手法である。状態変数の推定値が実機のそれらに近い値になるためには、実機にできる限り近い数式モデルが要求される。しかし、モデル化誤差や実機の物理的なパラメータ変動があり、制御システムのロバスト性に課題が残る。これに対してノッチフィルタを用いた手法はフィルタにより共振周波数成分のみを減衰させ、全体の応答を維持しつつ、振動成分のみを抑制する制御手法である。この手法

はフィルタ挿入による位相遅れが発生するものの実装が容易である。ノッチフィルタについて、フィルタの位相遅れを補償する手法が多く提案されているが、フィルタの実装に関する研究は少ない。従来のシフトモデルと比較してデルタモデルの演算精度が高いことが理論的に示されているが、簡単に応用できる具体例が少ない [2]。

ところで、約半世紀前は語長が短い固定少数点マイクロプロセッサのみであったため、制御関連の演算は固定小数点演算により実行していた。このため、演算精度の向上や演算のダイナミックレンジを拡大するため浮動小数点マイクロプロセッサが強く望まれてきた。しかし、近年、再び固定小数点演算ハードウェアへの回帰現象が発生している。IOT や宇宙用の FPGA に対して低消費電力、低コストが厳しく要求されるようになってきたためである。浮動小数点演算から固定小数点演算に変更すると、電子回路が約 20% に削減でき、それに伴い消費電力やコストも大幅に削減できる [3]。

本研究では、剛性が低い機械システムの振動抑制に有用なノッチフィルタについて、固定小数点演算においても十分な精度で演算可能な実装手法と必要な語長を見積もることを目的とする。第 2 章では固定小数点ノッチフィルタについてシフトモデルとデルタモデルを比較し、必要な語長を求める。第 3 章ではノッチフィルタの応用例として DC モータの PID 制御を考え、その性能を検証し、第 4 章では結論を述べる。

1) 東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科 電気電子工学コース

2. 固定小数点ノッチフィルタ

2.1 ノッチフィルタ

ノッチフィルタの伝達関数は以下で与えられる [1].

$$F(s) = \frac{s^2 + 2d\zeta_f\omega_f s + \omega_f^2}{s^2 + 2\zeta_f\omega_f s + \omega_f^2} \quad (1)$$

ここで、 ω_f はノッチフィルタの中心周波数、 d は深さ、 ζ_f は幅とする。

2.2 ノッチフィルタのシフトモデル

コンピュータ上でノッチフィルタを構成するため、式 (1) に示す連続時間系ノッチフィルタを離散化する。零次ホールドにより離散化した場合、フィルタの中心周波数が連続時間系のそれと僅かながら異なるため、プリワーピングと双一次変換により離散化する [1]。離散化したノッチフィルタの伝達関数を以下に示す。

$$F(z) = \frac{b_{s2}z^2 + b_{s1}z + b_{s0}}{z^2 + a_{s1}z + a_{s0}} \quad (2)$$

図 1 に式 (2) に示す離散時間系のノッチフィルタのブロック線図を示す。固定小数点演算では、まず、 k_i により加算点 P_{s1} がオーバーフローしないように調節した後、 k_o により P_{s2} がオーバーフローしないように調節する。

2.3 ノッチフィルタのデルタモデル

式 (2) に示す離散時間系を以下に示すデルタオペレータ δ

$$\delta = z - 1 \quad (3)$$

によりデルタモデルに変換する。

$$F(\delta) = \frac{\bar{b}_{d2}\delta^2 + \bar{b}_{d1}\delta + \bar{b}_{d0}}{\delta^2 + \bar{a}_{d1}\delta + \bar{a}_{d0}} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{a}_{d1} &= 2 + a_{s1} \\ \bar{a}_{d0} &= 1 + a_{s1} + a_{s0} \\ \bar{b}_{d2} &= a_{s2} \\ \bar{b}_{d1} &= 2b_{s2} + b_{s1} \\ \bar{b}_{d0} &= b_{s2} + b_{s1} + b_{s0} \end{aligned}$$

とする。図 2 にオーバーフローを調整するためのパラメータ T_1 , T_2 を導入したデルタモデルのブロック線図を示す。固定小数点演算では、シフトモデルと同様にして加算点 P_{d1} , P_{d2} , P_{d3} , P_{d4} がオーバーフローしないように k_i , T_1 , T_2 , k_o をそれぞれ順に調整する。なお、式 (4) に示すデルタモデルと等価になるためには、それぞれの係数を T_1 , T_2 で除す必要がある。そこで、図 2 に示すデルタモデルは式 (4) から

$$F(\delta) = \frac{b_{d2}\delta^2 + b_{d1}\delta + b_{d0}}{\delta^2 + a_{d1}\delta + a_{d0}} \quad (5)$$

と求まる。ここで、

$$\begin{aligned} a_{d1} &= \frac{\bar{a}_{d1}}{T_1}, & a_{d0} &= \frac{\bar{a}_{d0}}{T_1 T_2} \\ b_{d2} &= \bar{b}_{d2}, & b_{d1} &= \frac{\bar{b}_{d1}}{T_1}, & b_{d0} &= \frac{\bar{b}_{d0}}{T_1 T_2} \end{aligned}$$

とする。さらに、式 (5) は式 (4) を考慮すると以下のシフトモデルと等価になる。

$$F(z) = \frac{\bar{b}_{s2}z^2 + \bar{b}_{s1}z + \bar{b}_{s0}}{z^2 + \bar{a}_{s1}z + \bar{a}_{s0}} \quad (6)$$

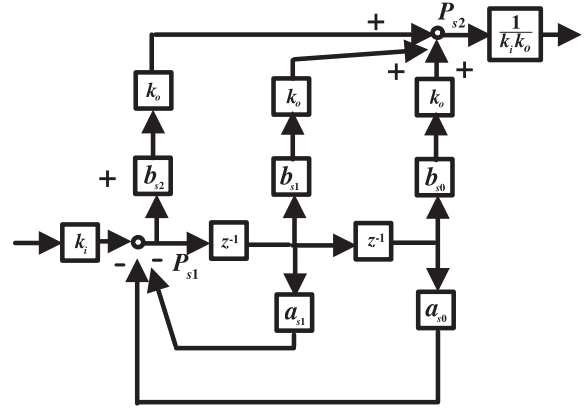


Fig. 1 Second-order shift model

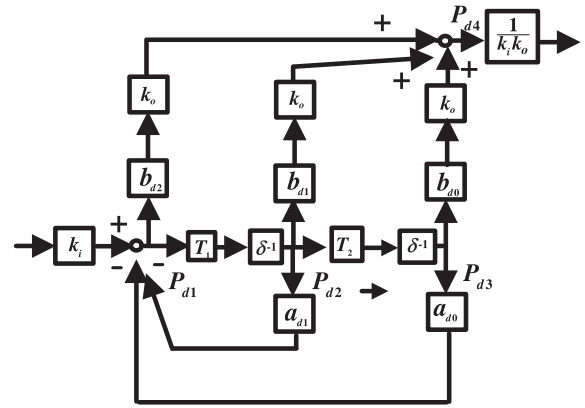


Fig. 2 Second-order delta model

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{a}_{s1} &= T_1 a_{d1} - 2 \\ \bar{a}_{s0} &= 1 - T_1 a_{d1} + T_1 T_2 a_{d0} \\ \bar{b}_{s2} &= b_{d2} \\ \bar{b}_{s1} &= T_1 b_{d1} - 2b_{d2} \\ \bar{b}_{s0} &= b_{d2} - T_1 b_{d1} + T_1 T_2 b_{d0} \end{aligned}$$

とする。

2.4 シフトモデルとデルタモデルの演算精度の比較

固定小数点演算では式 (2) と式 (5) に示すフィルタ係数の表現に誤差が生じる。この表現誤差により、固定小数点演算により求めたボード線図は倍精度浮動小数点演算で求めたボード線図と異なる。そこで、演算精度を評価するため、両演算により求めた値を、それぞれ、 F_d , F_f とすると F_d と F_f の差について 2 乗平均平方根誤差 (Root Mean Square Error, RMSE) を求める。周波数 ω は 10 rad/s から 10000 rad/s まで対数目盛で等間隔になる 1000 点について RMSE を求める。

$$\Delta|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1000} (|F_d(j\omega_i)| - |F_f(j\omega_i)|)^2}{1000}} \quad (7)$$

$$\Delta\angle F(j\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1000} (\angle F_d(j\omega_i) - \angle F_f(j\omega_i))^2}{1000}} \quad (8)$$

表 1 にノッチフィルタの仕様を、表 2 にサンプリング周期 $T=1\text{ms}$ で離散化したときのシフトモデル、デルタモデルの係数を示す。なお、係数の表記は両モデルとも同一文字で表記している。また、MATLAB の関数 `dbode` により演算するため、デルタモデルについては式 (5) と等価な式 (6) を用いる。

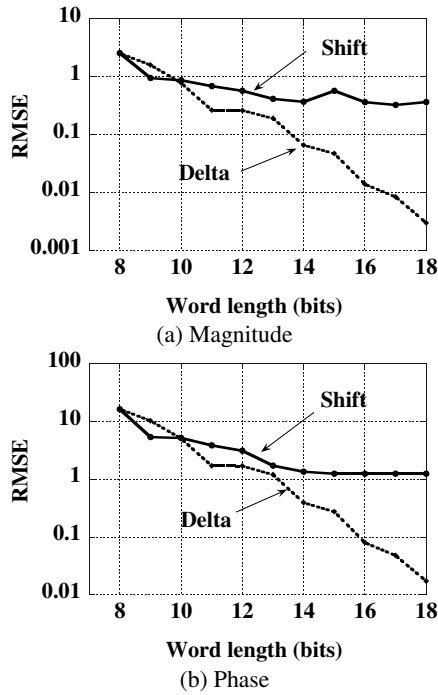


Fig. 3 RMSE on the Bode diagram of a notch filter

Table 1 Specification of a notch filter

Center frequency	ω_f	50 rad/s
Width of a notch filter	ζ_f	0.5
Depth of a notch filter	d	0.01

Table 2 Notch filter coefficients

	Shift	Delta
k_i	0.0030	0.0450
k_o	1.0000	0.9500
a_0	0.7323	1.2561
a_1	-1.6476	0.7049
b_0	0.8648	1.2561
b_1	-1.6476	0.1749
b_2	0.8675	0.8675
T_1	—	0.5000
T_2	—	0.1350

図3にシフトモデルとデルタモデルに関するRMSEを示す。語長が8ビットや9ビットでは、デルタモデルの誤差の方が大きい。これは、デルタモデルではフィルタ係数だけではなく、式(6)に示す調整パラメータ T_1 及び T_2 の表現誤差が発生するためである。しかし、デルタモデルではRMSEが語長に対してほぼ線形に減少していくため、離散時間系の表現にも拘わらず連続時間系を精度よく表現している。一方、シフトモデルでは、語長が14ビット近辺からRMSEがほぼ一定になる。これはシフトモデルではフィルタ係数の誤差に関する感度が非常に高く、僅かな表現誤差でもフィルタの特性が変化してしまつたためである。図4及び図5にシフトモデルとデルタモデルで表現されたフィルタのボード線図を示す。デルタモデルでは語長が14ビットになると倍精度浮動小数点演算の結果に近くなる。

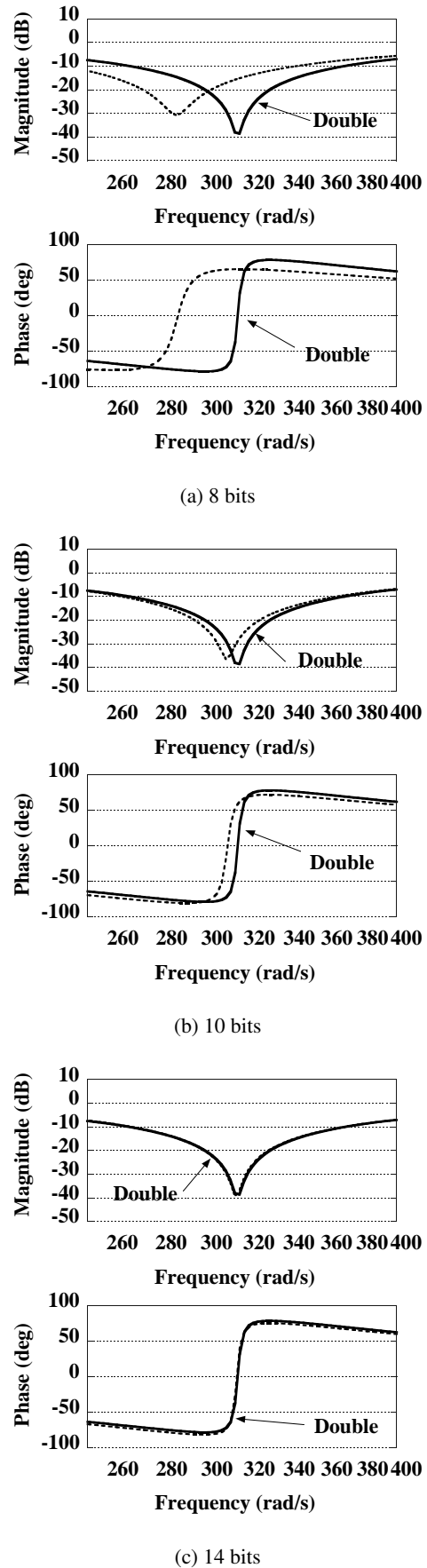
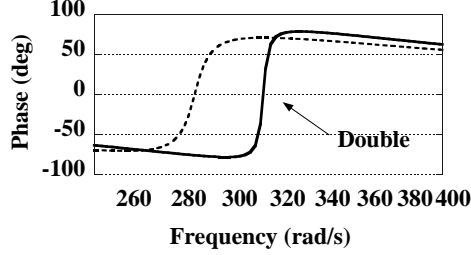
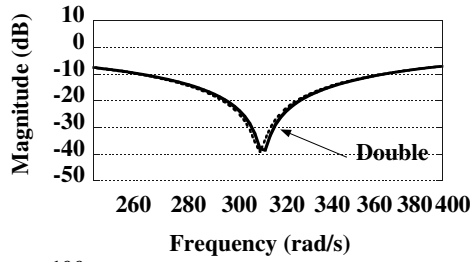
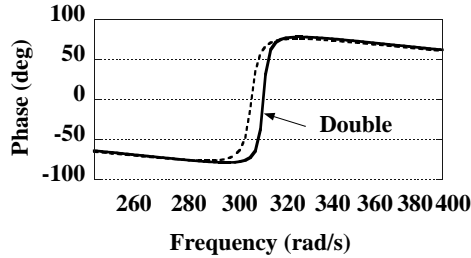
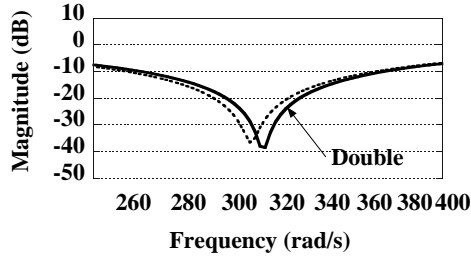


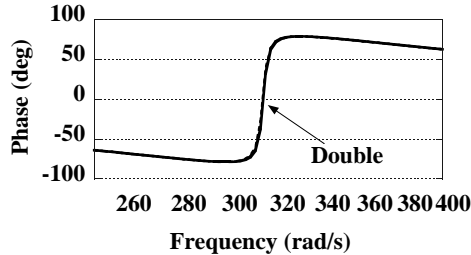
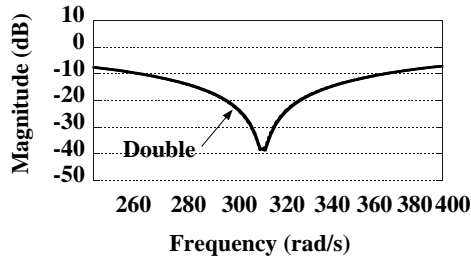
Fig. 4 Bode diagrams of a notch filter based on the shift model



(a) 8 bits



(b) 10 bits



(c) 14bits

Fig. 5 Bode diagrams of a notch filter based on the delta model

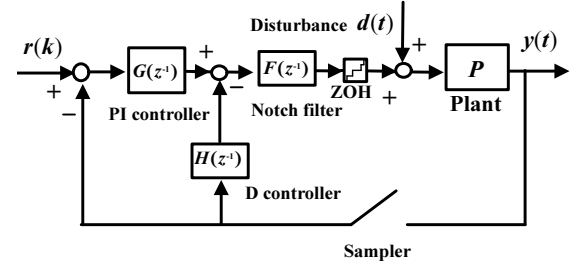


Fig. 6 PID control system with a notch filter

3. 固定小数点ノッチフィルタの特性の検証

3.1 PID コントローラ

ノイズ対策のため不完全微分を採用したPIDコントローラを以下に示す。

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d \frac{Ns}{s+N} \right) \quad (9)$$

ここで、 k_p は比例ゲイン、 T_i は積分ゲイン、 T_d は微分ゲイン、 N は不完全微分項の最大値とする。式(9)に示すPIDコントローラでは、ステップ信号入力時に微分項から大きな信号が出力される。その出力はノッチフィルタの入力になるため、固定小数点演算の狭いダイナミックレンジを考慮するとこの過大な信号を避ける必要がある。そこで、図6に示すように式(9)に示すPIDコントローラを以下のようにPIコントローラと不完全微分項に分離する。

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} \right) \quad (10)$$

$$H(s) = k_p T_d \frac{Ns}{s+N} \quad (11)$$

なお、式(10)及び式(11)は、コンピュータに実装するため、図6に示すようにプリワーピングと双一次変換により離散化する。

3.2 DC モータのモデル

入力が電圧、出力が回転位置とした場合の伝達関数は、

$$P_r(s) = \frac{K_t}{(Js+B)(Ls+R)+K_t K_t} \frac{1}{s} \quad (12)$$

で与えられる。さらに、剛性が低いシステムを表現するため、以下の2次系を式(12)に示すモデルに直列に接続する。

$$P_f(s) = \frac{-\omega_p s + \omega_p^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2} \quad (13)$$

3.3 シミュレーション結果

MATLAB/Simulink を用い、サンプリング周期 T は 1ms、PID コントローラパラメータは $k_p = 20$ 、 $T_d = 0.02s$ 、 $T_i = 0.05s$ に設定した。表3にDCモータの物理パラメータを示す。ノッチフィルタの部分のみ16ビット固定小数点演算を行い、スケール変換は $1.0 \triangleq 32768$ とした。他の部分は通常のMATLAB/Simulinkの演算により実行した。図7にDCモータ単体のインパルス応答を示す。剛性が低いシステムのため、モータは減衰振動している。図8に倍精度浮動小数点ノッチフィルタの有無によるPID制御系に関するステップ応答の違いを示す。ノッチフィルタにより振動が抑制されていることがわかる。 $r(k) = 1.0$ のときのステップ応答は、シフトモデル、デルタモデルとも倍精度浮動小数点演算の場合とほぼ同

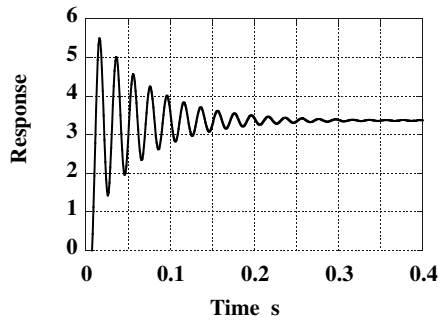


Fig. 7 The impulse response of a DC motor

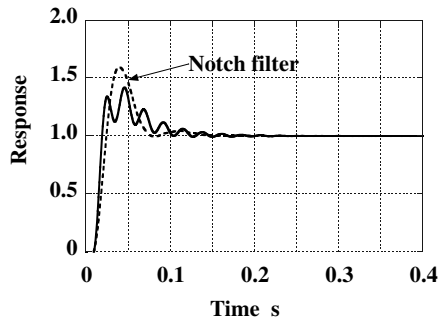


Fig. 8 PID control without and with a notch filter

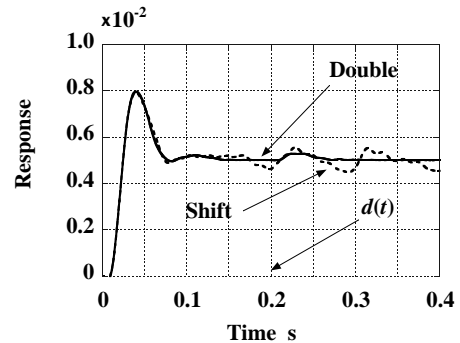
Table 3 The physical parameters of a DC motor

Moment of inertia of the rotor	J	$1.0 \text{ e-}5 \text{ kgm}^2$
Motor viscous friction constant	B	$2.0 \text{ e-}3 \text{ Nms}$
Electromotive force constant	K_i	$3.0 \text{ e-}2 \text{ V/rad/s}$
Motor torque constant	K_t	$3.0 \text{ e-}2 \text{ Nm/A}$
Electric resistance	R	4.0Ω
Electric inductance	L	$4.0 \text{ e-}5 \text{ H}$
Motor natural frequency	ω_p	50 rad/s
Motor damping factor	ζ_p	$5.0 \text{ e-}2$

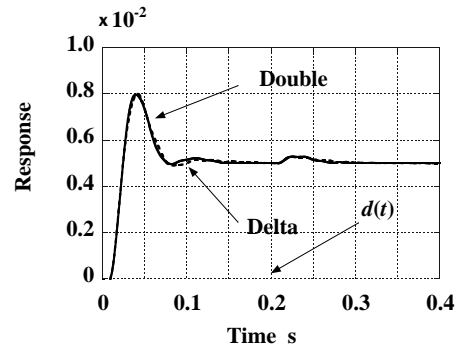
一の結果が得られた。しかし、図9に示すように $r(k) = 5e-3$ のときのステップ応答について、シフトモデルでは振動が発生しているが、デルタモデルでは倍精度浮動小数点演算とほぼ同じ応答が得られた。なお、0.2sにおいてステップ状の外乱 $d(t) = 5e-3 \text{ Nm}$ を加えた。外乱の影響が時間の経過とともに減少しており、I動作が正常に機能していることがわかる。一方、 $r(k)$ が振幅1、周波数が0.5Hzの正弦波応答ではシフトモデル、デルタモデルとも倍精度浮動小数点演算の場合とほぼ同一の結果が得られた。しかし、振幅 $5e-3$ 、0.5Hzの正弦波の場合、図10に示すようにシフトモデルでは振動により目標 $r(k)$ に追従できないが、デルタモデルでは $r(k)$ に追従している。なお、ステップ応答の場合と同様に外乱を加えた。

4. 結論

固定小数点ノッチフィルタについて、シフトモデルとデルタモデルの演算精度を比較した。フィルタ係数の表現誤差について、デルタモデルの方が表現誤差の影響を受けにくく、語長は14ビット以上に設定すればよいことがわかった。PID制御について、デルタモデルの方が調整パラメータにより演算のオーバーフローを回避できるため、演算のダイナミックレンジが広いことがわかった。

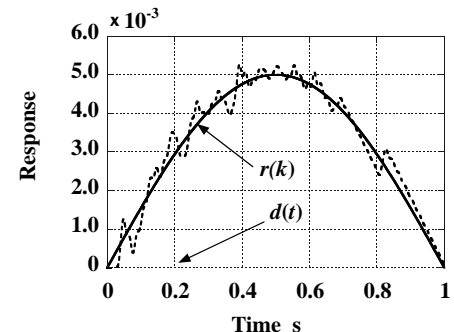


(a) Shift model

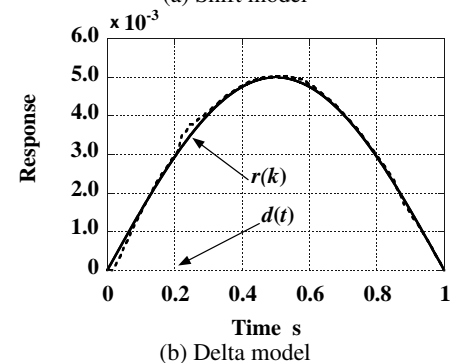


(b) Delta model

Fig. 9 Step response of a DC motor



(a) Shift model



(b) Delta model

Fig. 10 Sinusoidal response of a DC motor

5. 参考文献

- [1] @yknk0104: ノッチフィルタを理解する, <https://qiita.com/yknk0104/items/9519fa02dfd37ea4b228>, 2019
- [2] I. Karimov, D. Butusov, V. Andreev, et al.: Compact fixed-point filter implementation, Proc. of the 22nd conference of fruct association, pp. 73-78, 2018
- [3] A. Finnerty, H. Ratiger: Reduce power and cost by converting from floating point to fixed point, XILINX wp491, 2017