

# 球状粒子を含む複合材料の巨視的弾性特性に 及ぼす粒子構造と粒子間距離の影響

## Influence of Particle Structure and Distance on Macroscopic Elastic Properties of Composite Material Including Spherical Particles

稲村 栄次郎<sup>1)</sup>

Eijiro Inamura<sup>1)</sup>

**Abstract:** In this paper, macroscopic elastic properties of composite material including spherical particles are evaluated by using a three-dimensional analysis based on the finite element method and theoretical ones based on the equivalent inclusion theory. In the numerical analysis, it is assumed that particles of the same size are arrayed in simple cubic, body-centered cubic and face-centered cubic. The volumetric fraction of particles is determined by the radius of particle. A periodic patterned cubic portion is treated as a unit cell and given specific displacements on its boundary surfaces. The macroscopic Young modulus and the macroscopic Poisson ratio of the composite material are obtained from reaction forces on the boundary surfaces. In order to compare to them, the macroscopic elastic properties are also calculated using the Mori-Tanaka theory and the self-consistent method which are based on the Eshelby equivalent inclusion theory. As an example, composite material consisting of glass particles and epoxy matrix is considered. The numerical results for the simple cubic cell are coincident with ones of the self-consistent method. On the other hand, the numerical results for body-centered cubic and face-centered cubic cells are coincident with ones of the Mori-Tanaka theory. Moreover, considering particle distance, all results approximate together.

**Keywords :** Composite Material, Material Design, Elasticity, Finite Element Method, Equivalent Inclusion Theory

### 1. 緒言

傾斜機能材料は空間的に一つの機能から他の機能へと連続的または段階的に変化する一体の材料であり、耐熱、電気機器、医療などの広い用途へ適用されている [1, 2]. そのため、材料設計の際には最適な素材の混合比を与えるために、巨視的な弾性係数の評価方法が必要である。その評価方法については材料の混合形態によって幾つかの混合則が提案されてきた。特に、粒子状の介在相が母相に分散している粒子分散型複合材料については、その粒子形状を考慮した弾性係数の評価方法が提案されている [3–5]。また、非均質材料における微視的構造の解析から巨視的応答を得る均質化法も研究されている [6, 7]。さらに、分子動力学法による解析モデルから巨視的な弾性係数が算出されている [8]。いずれの方法も、混合比の適用範囲が限られたり、取り扱いが複雑であったりなど、弾性係数の評価が容易に得にくい。

それに対し著者 [9] は、球状粒子を含む粒子強化型複合材料の三次元解析モデルを作成し、有限要素法による数値計算を行って、混合比の全範囲にわたる複合材料の巨視的な弾性係数を簡易評価した。粒子は体心立方格子状のみに配置していると仮定し、その一部からユニットセルを作成した。有限要素法で得られた結果と Eshelby の等価介在物理論 [10] に基づく理論解 [11, 12] と比較を行い、そ

の差異について検討した。

そこで本研究では、大きさが等しい球状粒子を含む複合材料に対して、粒子構造および粒子間の相対的な距離が弾性係数に及ぼす影響を調べた。粒子は単純立方格子状、体心立方格子状、面心立方格子状に配置しているものとし、それぞれその一部からユニットセルを作成した。そのユニットセルに含まれる粒子径を変えることによって粒子間の相対的な距離を変化させた。有限要素法に基づく三次元応力解析を行い、その複合材料の巨視的な弾性係数を算出した。ユニットセルを四面体要素に分割し、周囲の境界条件として強制変位を与えることによって生じる反力から縦弾性係数とポアソン比を求めた。得られた結果を Eshelby の等価介在物理論 [4] に基づく結果とともに比較し、その差異を示した。

### 2. 有限要素法解析

本研究において、複合材料に含まれる球状粒子は同一直径であり、図 1 のように、単純立方格子状 (sc)、体心立方格子状 (bcc)、面心立方格子状 (fcc) に配置している場合を考える。そして、図 2 の左図に示すように、複合材料内に直交座標系  $xyz$  を設け、その一部である立方体に注目する。この立方体に対して、 $x$  軸および  $z$  軸に垂直な四つ面、 $y$  軸に垂直な一つの面の垂直変位  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  を拘束する。

1) 東京都立産業技術高等専門学校ものづくり工学科、機械システム工学コース

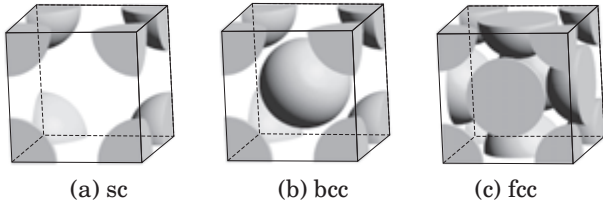


図1 複合材料内の粒子構造

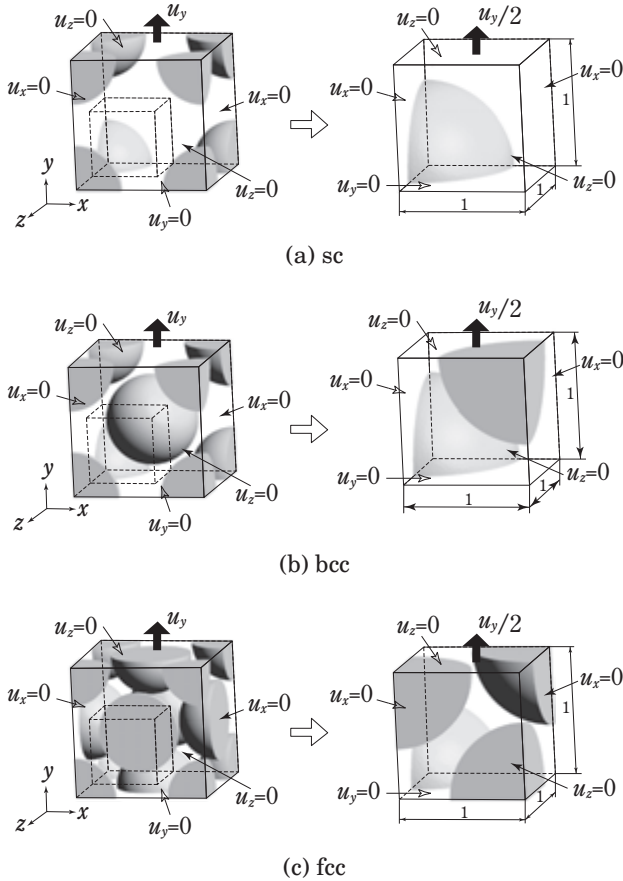


図2 有限要素法解析モデル

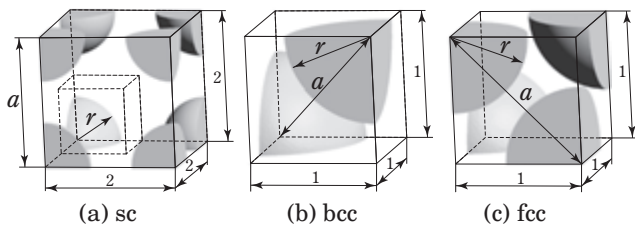


図3 粒子の中心間距離

そして、 $y$  軸に垂直なもう一つの面に強制垂直変位  $u_y$  を与える。さらに、問題の対称性から図2の左図の破線で示す立方体の8分の1の部分にモデルを縮小することができる。このモデルを図2の右図に示す一辺の長さが1であるユニットセルとして扱う。

図3は、最も隣接する粒子の中心間距離を示したものであり、その距離を  $a$  とすると、各格子について次の値と

なる。

$$a = \begin{cases} 2 & (\text{sc}) \\ \sqrt{3} & (\text{bcc}) \\ \sqrt{2} & (\text{fcc}) \end{cases} \quad (1)$$

また、ユニットセルに含まれる粒子半径を  $r$  で表す。 $r$  は母相のみ ( $r = 0$ ) から粒子同士が接触するまでの範囲 ( $r = a/2$ ) を取り扱った。この  $r$  を用いて複合材料の体積分率  $f$  を表すと、各格子に対して次式が得られる。

$$f = \begin{cases} \frac{\pi}{6} r^3 & (\text{sc}) \\ \frac{\pi}{3} r^3 & (\text{bcc}) \\ \frac{2\pi}{3} r^3 & (\text{fcc}) \end{cases} \quad (2)$$

図2の右図のユニットセルに強制変位  $u_y/2 = 1 \times 10^{-3}$  を与える。このユニットセルに対し有限要素法を適用し弾性応力解析を行う。そして、応力解析により得られた  $x, y, z$  軸に垂直な面に作用する、面に垂直な反力の成分の総和をそれぞれ垂直応力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  とする。なお、問題の対称性から  $\sigma_x$  と  $\sigma_z$  は等しい。また、 $x, y, z$  軸に垂直な面に対する、面に垂直な変位からそれぞれ垂直ひずみ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  を求める。ユニットセルの一辺の長さが1であることから、 $y$  軸に垂直な一つの面に与えた強制変位  $u_y/2$  は  $\varepsilon_y$  に等しい。 $\varepsilon_x$  および  $\varepsilon_z$  は変位を拘束されているため、 $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$  である。

複合材料が巨視的に均質等方性であると仮定し、巨視的な縦弾性係数およびポアソン比をそれぞれ  $\bar{E}$  および  $\bar{\nu}$  で表すと、均質等方性材料に関する Hooke の法則より次の関係式が成り立つ。

$$\sigma_x = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_x + \bar{\nu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\} \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_y + \bar{\nu}(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\} \quad (4)$$

$$\sigma_z = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_z + \bar{\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\} \quad (5)$$

そして、 $\bar{E}$  および  $\bar{\nu}$  は  $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$  の条件から  $\sigma_x, \sigma_y, \varepsilon_y$  を用いて次のように求められる [8]。

$$\bar{E} = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)(2\sigma_x + \sigma_y)}{(\sigma_x + \sigma_y)\varepsilon_y} \quad (6)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_y} \quad (7)$$

また、巨視的な体積弾性係数およびせん断弾性係数をそれぞれ  $\bar{\kappa}$  および  $\bar{\mu}$  で表すと、均質等方性材料の弾性係数間の関係より次式が与えられる。

$$\bar{\kappa} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (8)$$

$$\bar{\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

有限要素解析において、要素分割に三次元有限要素生成ソフトウェア gmsh 4.6.0 [13]、応力解析には設計用大

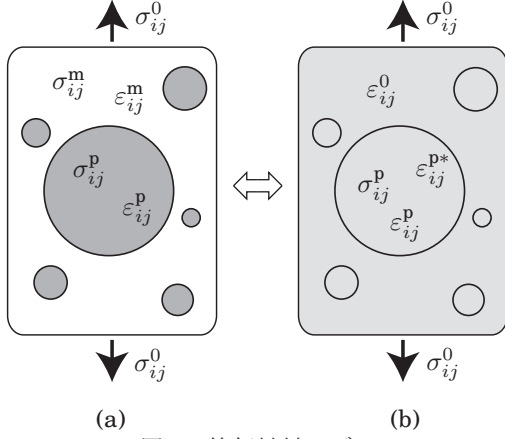


図4 等価材料モデル

規模計算力学システム ADVENTURE [14] を用いた。計算条件によって異なるが、節点は約 3 万点、要素は約 16 万個である。

### 3. 等価介在物理論

図 4(a) に示すような母相の中に球状粒子が分散している複合材料を考える。本節では、指標表示を用いて応力やひずみの成分を示す。母相および粒子の体積弾性係数を  $\kappa^m, \kappa^p$  で表す。同様に、せん断弾性係数を  $\mu^m, \mu^p$ 、ポアソン比を  $\nu^m, \nu^p$  で表す。複合材料の境界には一様に応力  $\sigma_{ij}^0$  が生じているものとする。一方、図 4(b) に示すように、図 4(a) の複合材料と同一の形状をもち、全体が均質等方性の等価材料を考え、その体積弾性係数、せん断弾性係数およびポアソン比をそれぞれ  $\kappa^0, \mu^0, \nu^0$  で表す。図 4(a) の複合材料と同様に境界には応力  $\sigma_{ij}^0$  が作用しているものとする、等価材料内の平均応力は  $\sigma_{ij}^0$  であり、平均ひずみ  $\varepsilon_{ij}^0$  が生ずると考える。このとき、応力とひずみの関係に Hooke の法則が成立すると、

$$\sigma_{ij}^0 = \kappa^0 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0 + 2\mu^0 \varepsilon_{ij}^0 \quad (10)$$

ただし、 $\varepsilon_{ij}^0$  はひずみ  $\varepsilon_{ij}^0$  の偏差成分を表し、 $\delta_{ij}$  はクロネッカのデルタである。

粒子内の平均応力を  $\sigma_{ij}^p$ 、平均ひずみを  $\varepsilon_{ij}^p$  とする。また、 $\varepsilon_{ij}^p$  と  $\varepsilon_{ij}^0$  の差異を  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^p$  で表す。ここで、Eshelby の等価介在物理論 [10] により  $\sigma_{ij}^p$  は次式のように表すことができる。

$$\sigma_{ij}^p = \kappa^p \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kk}^p) + 2\mu^p (\varepsilon_{ij}^0 + \tilde{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (11)$$

$$= \kappa^0 \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{p*}) + 2\mu^0 (\varepsilon_{ij}^0 + \tilde{\varepsilon}_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{p*}) \quad (12)$$

$\varepsilon_{ij}^{p*}$  は粒子内の固有ひずみで、弾性的な不均質性を考慮するためのものである。そこで、 $\tilde{\varepsilon}_{ij}^p$  は  $\varepsilon_{ij}^{p*}$  を用いて次式で表すことができる。

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{3} \alpha \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{p*} + \beta \varepsilon_{ij}^{p*} \quad (13)$$

ただし、球状粒子の場合、 $\alpha$  および  $\beta$  は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{1 + \nu^0}{3(1 - \nu^0)}, \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu^0)}{15(1 - \nu^0)} \quad (14)$$

式 (13) を式 (12) に代入すると次式が得られる。

$$\sigma_{ij}^p = \kappa^0 \delta_{ij} \{ \varepsilon_{kk}^0 + (\alpha - 1) \varepsilon_{kk}^{p*} \} + 2\mu^0 \{ \varepsilon_{ij}^0 + (\beta - 1) \varepsilon_{ij}^{p*} \} \quad (15)$$

また、式 (13) を式 (11) に代入した式と式 (15) から、 $\varepsilon_{ij}^{p*}$  は次式となる。

$$\varepsilon_{ij}^{p*} = - \frac{\kappa^p - \kappa^0}{3\{\kappa^0 + \alpha(\kappa^p - \kappa^0)\}} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0 - \frac{\mu^p - \mu^0}{\mu^0 + \beta(\mu^p - \mu^0)} \varepsilon_{ij}^0 \quad (16)$$

粒子の体積分率を  $f$  で表し、複合材料の平均応力  $\bar{\sigma}_{ij}$  および平均ひずみ  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  を、母相および粒子の応力およびひずみの線形混合則で表す。

$$\{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}\} = (1 - f) \{ \sigma_{ij}^m, \varepsilon_{ij}^m \} + f \{ \sigma_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^p \} \quad (17)$$

また、複合材料の巨視的体積弾性係数および巨視的せん断弾性係数をそれぞれ  $\bar{\kappa}$  および  $\bar{\mu}$  で表す。

Mori-Tanaka の平均場理論 [11] に基づき、等価材料の弾性係数  $\kappa^0, \mu^0$  として複合材料の母相の弾性係数  $\kappa^m, \mu^m$ 、等価材料の平均ひずみ  $\varepsilon_{ij}^0$  として複合材料の母相の平均ひずみを  $\varepsilon_{ij}^m$  をとる。すなわち、 $\kappa^0 = \kappa^m, \mu^0 = \mu^m, \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^m$  とすれば、 $\bar{\kappa}$  および  $\bar{\mu}$  は、式 (11)~(17) から次式として得られる。

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa^m \kappa^m + \{f + (1 - f)\alpha\}(\kappa^p - \kappa^m)}{\kappa^m + (1 - f)\alpha(\kappa^p - \kappa^m)} \quad (18)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^m \mu^m + \{f + (1 - f)\beta\}(\mu^p - \mu^m)}{\mu^m + (1 - f)\beta(\mu^p - \mu^m)} \quad (19)$$

また、Self-consistent 法 [12] を用い、等価材料の弾性係数  $\kappa^0, \mu^0$  として複合材料の巨視的弾性係数  $\bar{\kappa}, \bar{\mu}$ 、等価材料の平均ひずみ  $\varepsilon_{ij}^0$  として複合材料の母相の平均ひずみを  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  をとる。すなわち、 $\kappa^0 = \bar{\kappa}, \mu^0 = \bar{\mu}, \varepsilon_{ij}^0 = \bar{\varepsilon}_{ij}$  とすれば、 $\bar{\kappa}$  および  $\bar{\mu}$  は、式 (11)~(17) から次式として得られる。

$$\bar{\kappa} = \kappa^m - f \frac{(\kappa^m - \kappa^p)\bar{\kappa}}{\bar{\kappa} + \alpha(\kappa^p - \bar{\kappa})} \quad (20)$$

$$\bar{\mu} = \mu^m - f \frac{(\mu^m - \mu^p)\bar{\mu}}{\bar{\mu} + \beta(\mu^p - \bar{\mu})} \quad (21)$$

得られた  $\bar{\kappa}, \bar{\mu}$  より複合材料の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  および巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  は、均質等方性材料の弾性係数間の関係より次式で求められる。

$$\bar{E} = \frac{\bar{\mu}(9\bar{\kappa} - \bar{\mu})}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}} \quad (22)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3\bar{\kappa} - 2\bar{\mu}}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}} \quad (23)$$

### 4. 計算例

計算例として、エポキシとガラスからなる二相複合材料を取り扱った。それぞれの縦弾性係数  $E$  およびポアソン比  $\nu$ 、あるいは体積弾性係数  $\kappa$  およびせん断弾性係数  $\mu$

表 1 ガラスとエポキシの材料特性

	$E$ GPa	$\nu$	$\kappa$ GPa	$\mu$ GPa
Glass	72.4	0.20	40.2	30.2
Epoxy	2.76	0.35	3.07	1.02
Glass/Epoxy	26.2	0.57	13.1	29.6

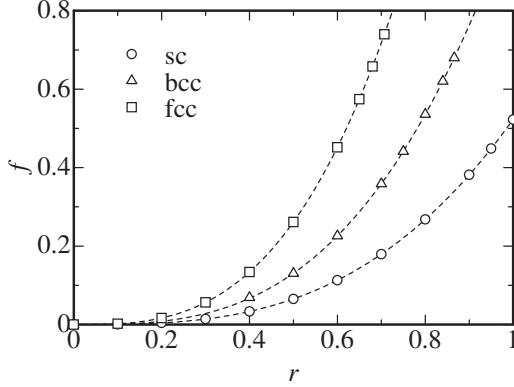


図 5 粒子の半径  $r$  と体積分率  $f$  の関係

は表 1 に示す通りである [12]. また, 表中にはエポキシに対するガラスの比を示した. ここでは, エポキシを母相, ガラスを粒子として扱った.

球状粒子の半径  $r$  と体積分率  $f$  の関係を図 5 に示す. 白抜きの印は, それぞれ要素分割した後, 粒子に相当する要素の体積を総和した値である. 破線は式 (2) で示した粒子の体積分率  $f$  である. 要素の体積から求めた値と破線はよく一致しており, ユニットセルが十分に要素分割されている. 粒子の半径  $r$  が式 (3) に示した隣接する粒子の中心間距離の半分に達すれば, 隣接する粒子はお互いに接触し合う. このときの粒子の半径  $r^*$  および体積分率  $f^*$  は, それぞれ

$$r^* = \begin{cases} 1 & \text{(sc)} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 & \text{(bcc)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 & \text{(fcc)} \end{cases} \quad (24)$$

$$f^* = \begin{cases} \frac{\pi}{6} = 0.524 & \text{(sc)} \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 0.680 & \text{(bcc)} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0.740 & \text{(fcc)} \end{cases} \quad (25)$$

なお, 図 5 では各粒子構造に対して  $0 \leq r \leq r^*$  の範囲で 10 点程示した.

有限要素解析および等価介在物理論より得られた粒子の体積分率  $f$  に対する複合材料の巨視的な縦弾性係数, ポアソン比, 体積弾性係数, せん断弾性係数をそれぞれ図 6, 7, 8, 9 に示す. 縦軸はそれぞれエポキシの値で除したものである. 白抜きの印は有限要素法解析から得られた結果である. 破線および実線はそれぞれ Mori-Tanaka の理論および Self-consistent 法による結果である. 各粒子構造に対して  $0 \leq f \leq f^*$  の範囲で 10 点程示した.

図 6 より, 巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  に関して, 粒子が単純

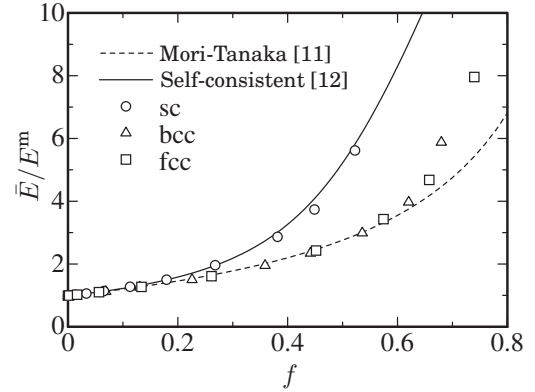


図 6 複合材料の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  と粒子の体積分率  $f$  の関係

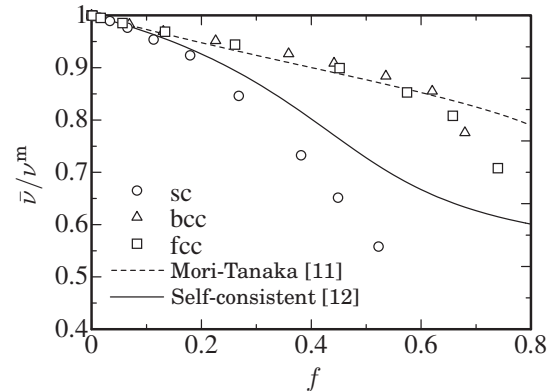


図 7 複合材料の巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  と粒子の体積分率  $f$  の関係

立方構造の結果は  $0 \leq f \leq f^*$  の範囲で Self-consistent 法による結果とよく一致する. 一方, 粒子が体心立方構造および面心立方構造の結果はほぼ一致しており, かつ Mori-Tanaka の理論による結果と  $0 \leq f \leq 0.6$  の範囲で一致する.  $f$  が 0.6 より大きくなるほど, 粒子が体心立方構造および面心立方構造の結果は, Mori-Tanaka の理論による結果との差異が大きくなる. 粒子が単純立方構造の結果および Self-consistent 法による結果は, 粒子が体心立方構造および面心立方構造の結果, Mori-Tanaka の理論による結果と比べて粒子の影響を過大に評価する.

図 7 より, 巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  に関して, 巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  と同様に, 粒子が体心立方構造および面心立方構造の結果はほぼ一致し, Mori-Tanaka の理論による結果と  $0 \leq f \leq 0.6$  の範囲で一致する.  $f$  が 0.6 より大きくなるほど, 粒子が体心立方構造および面心立方構造の結果は, Mori-Tanaka の理論による結果との差異が大きくなる. 一方, 粒子が単純立方構造の結果は  $0 \leq f \leq 0.2$  の範囲で Self-consistent 法による結果とよく一致するが,  $f$  が 0.2 より大きくなるほど差異が大きくなる. そして, 巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  は, ガラスのポアソン比より小さい値をとる.

図 8 より, 巨視的体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  に関して, 粒子が接触する場合を除いて, 粒子構造がいずれの場合の結果ともよく一致する. 巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  および巨視的ポアソン

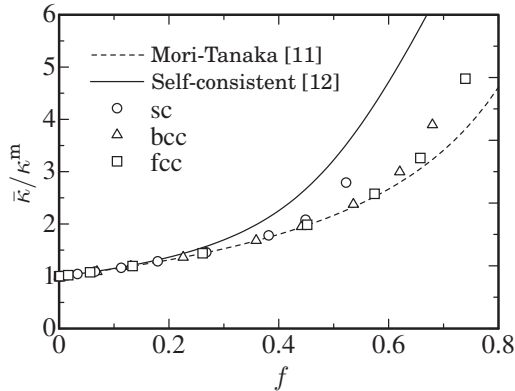


図 8 複合材料の巨視的体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  と粒子の体積分率  $f$  の関係

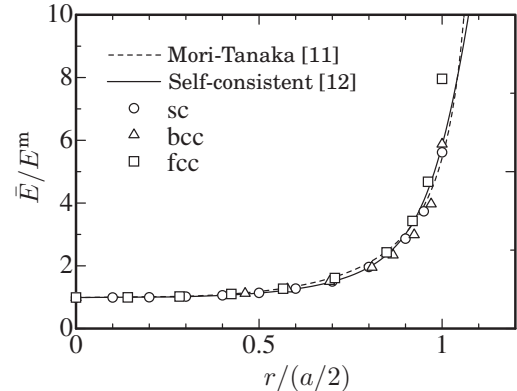


図 10 複合材料の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  と粒子半径  $r$  の関係

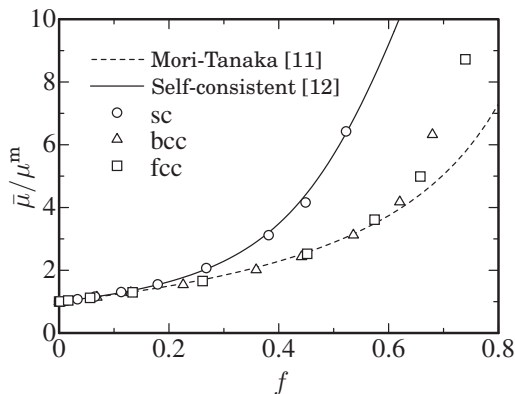


図 9 複合材料の巨視的せん断弾性係数  $\bar{\mu}$  と粒子の体積分率  $f$  の関係

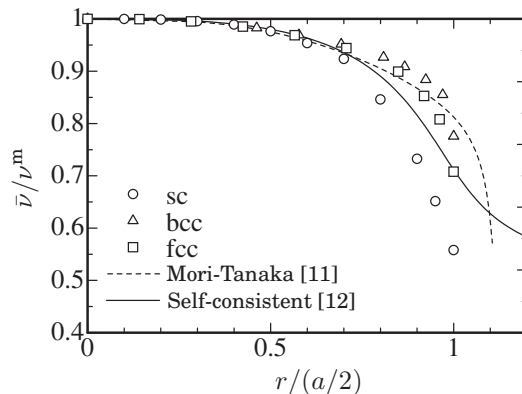


図 11 複合材料の巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  と粒子半径  $r$  の関係

比  $\bar{\nu}$  では、単純立方構造の結果に違いがみられたが、巨視的体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  に関してはそのような違いが生じない。また、粒子構造の結果は、Mori-Tanaka の理論による結果と  $0 \leq f \leq 0.6$  の範囲で一致する。Self-consistent 法による結果のみ、 $f$  が 0.3 付近より大きくなると差異が大きくなる。

図 9 より、巨視的せん断弾性係数  $\bar{\mu}$  に関しては、図 6 の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  と同様の傾向を示す。  $0 \leq f \leq f^*$  の範囲で粒子が単純立方構造の結果と Self-consistent 法による結果はよく一致する。粒子が体心立方構造、面心立方構造の結果および Mori-Tanaka の理論による結果は  $0 \leq f \leq 0.65$  の範囲で一致する。

次に、図 10, 11, 12, 13 は、粒子半径  $r$  を粒子間距離の半分  $a/2$  で除した値  $r/(a/2)$  に対する複合材料の巨視的な縦弾性係数、ポアソン比、体積弾性係数、せん断弾性係数の変化を示したものである。  $r/(a/2)$  が 1 のとき、粒子が接触した状態を意味する。また、図 6 から図 9 に示した結果を考慮して、粒子が単純立方構造の結果に近い Self-consistent 法による結果は、単純立方構造の粒子間距離を適用し、粒子が面心立方構造の結果に近い Mori-Tanaka の理論による結果は、面心立方構造の粒子間距離を適用した。

図 10 より、巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  に関して、粒子構造がいずれの場合の結果とも、  $0 \leq r/(a/2) \leq 1$  の範囲で一

致する。図 6 では、粒子が単純立方構造と体心立方構造、面心立方構造で明確な差がみられたが、  $r/(a/2)$  で整理することにより、粒子構造の差異がない。合わせて、Mori-Tanaka の理論による結果と Self-consistent 法による結果も図 6 では差異が確認できたが、図 10 では一致する。

図 11 の巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  に関しては、粒子構造がいずれの場合の結果とも、  $0 \leq r/(a/2) \leq 0.7$  の範囲でよく一致する。  $0.7 \leq r/(a/2) \leq 1$  の範囲では、粒子が単純立方構造の結果が、体心立方構造および面心立方構造の結果より小さい値を示す。Mori-Tanaka の理論による結果と Self-consistent 法による結果も、  $0 \leq r/(a/2) \leq 0.7$  の範囲で各粒子構造の結果も合わせてよく一致するが、  $0.7 \leq r/(a/2) \leq 1$  の範囲では差異がみられる。

図 12 の巨視的体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  に関して、粒子構造がいずれの場合の結果とも概ね一致する。巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  程度の一致ではないが、  $0.7 \leq f \leq 1$  の範囲において差異がみられる。特に単純立方構造は、他の粒子構造より小さい値を示す。巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  および巨視的ポアソン比  $\bar{\nu}$  では、単純立方構造の結果に違いがみられたが、Mori-Tanaka の理論および Self-consistent 法とともに、粒子構造の結果と比較的一致する。

図 13 の巨視的せん断弾性係数  $\bar{\mu}$  に関しては、図 10 の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  と同様の一致を示す。いずれの粒子構造の結果、Mori-Tanaka の理論および Self-consistent

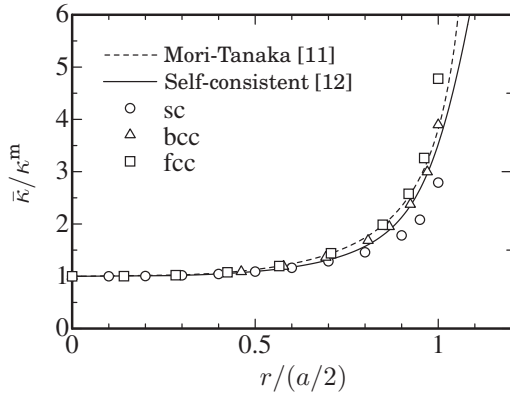


図 12 複合材料の巨視的体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  と粒子半径  $r$  の関係

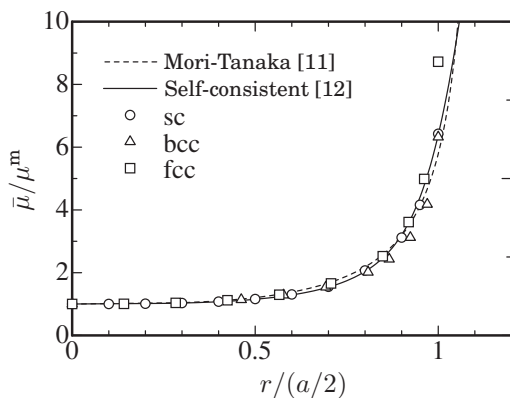


図 13 複合材料の巨視的体積弾性係数  $\bar{\mu}$  と粒子半径  $r$  の関係

法による結果においても、 $0 \leq r/(a/2) \leq 1$  の範囲で一致する。

これらの結果から、弾性係数の種類によって、一致の程度は異なるもの、粒子間距離を考慮して粒子半径で整理すると、粒子構造の違いによる結果の差異が縮まる。

図 14, 15, 16 には、 $r/(a/2)$  が 0.9, 巨視的縦弾性係数  $\bar{E}/E^m$  が約 3 の場合の相当応力の分布をコンター図で示したものである。左端のモデル図には視点を矢印で表しており、図 A は、 $x$  軸に垂直で  $x$  軸の負を向いた面のコンター図である。図 B は、 $y$  軸に垂直で  $y$  軸の負を向いた面のコンター図である。図 C は、 $z$  軸および  $y$  軸に対して傾斜した面のコンター図である。各コンター図の下にはコンターバーを示しており、数値の単位は MPa で相当応力の最小値から最大値までを範囲とする。最小値および最大値は図 A, B, C から決定した共通の値である。なお、要素内の相当応力は一定値で示している。

図 14 は、粒子構造が単純立方で粒子半径  $r$  が 0.9 の場合である。体積分率  $f$  は 0.382 である。粒子の最小値および最大値はそれぞれ 7.45 MPa および 20.8 MPa である。また母相内の最小値および最大値はそれぞれ 0.371 MPa および 19.1 MPa である。体積分率  $f$  が大きいため、粒子内で応力は一定とならない。粒子の中心間を結ぶ直線上の粒子内で最大を示す。また、母相内においても粒子の中心間を結ぶ直線上で最大を示す。粒子の中心間を結ぶ直線

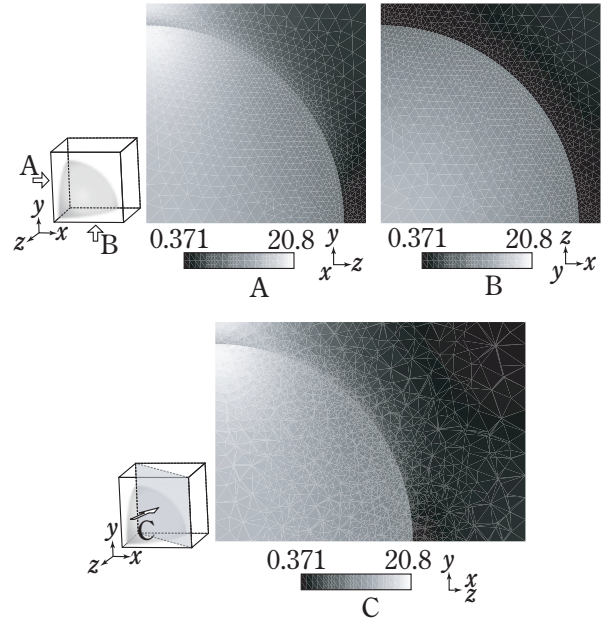


図 14 単純立方,  $r = 0.9$  の場合の相当応力分布

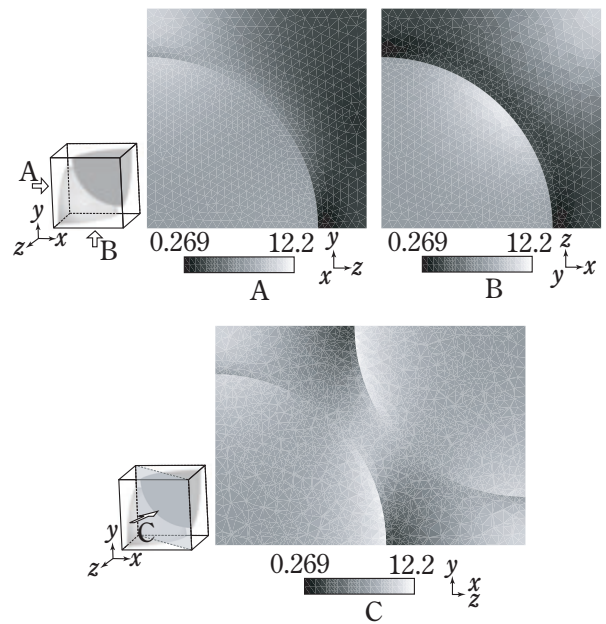


図 15 体心立方,  $r = 0.779$  の場合の相当応力分布

は、強制変位を与えた  $y$  軸方向と一致するため、その直線付近で応力が大きい。一方、図 A および C より、粒子から離れた母相内での応力は低い。

図 15 は、粒子構造が体心立方で粒子半径  $r$  が 0.779 の場合である。体積分率  $f$  は 0.495 である。粒子内の最小値および最大値はそれぞれ 6.34 MPa および 12.2 MPa である。また母相内の最小値および最大値はそれぞれ 0.269 MPa および 10.1 MPa である。粒子の最大応力は、図 B の中央付近で生じる。その付近を通る  $y$  軸方向の領域で粒子の応力は大きい。一方、母相の最大応力は、単純立方と同様に粒子の上部に現れる。最小応力および最大応力とも、粒子構造が単純立方の場合より小さく、応力が分散されている。

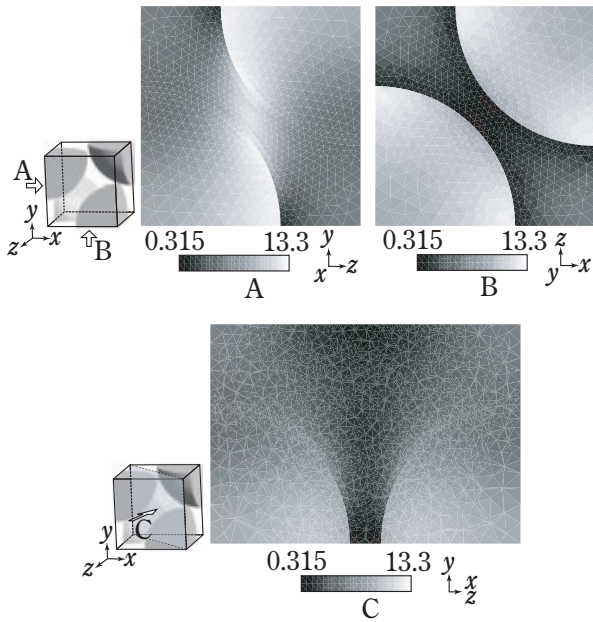


図 16 面心立方,  $r = 0.636$  の場合の相当応力分布

図 16 は、粒子構造が面心立方で粒子半径  $r$  が  $0.636$  の場合である。体積分率  $f$  は  $0.539$  である。粒子の最小値および最大値はそれぞれ  $4.84$  MPa および  $13.3$  MPa である。また母相の最小値および最大値はそれぞれ  $0.315$  MPa および  $12.0$  MPa である。粒子内で応力が高くなる場所は、図 A の中央付近で  $y$  軸方向に沿った領域に生じる。また、母相も図 A の中心付近で粒子の中心間を結んだ直線上に生じる。最小値および最大値は、粒子構造が単純立方の場合よりも小さいが、体心立方の場合よりやや大きい。

同等の巨視的縦弾性係数  $\bar{E}$  であるものの、粒子構造によって最大応力が異なり、粒子内および母相内で最大応力が小さい複合材料は体心立方構造である。

#### 4. 結言

本研究では、大きさが等しい球状粒子を含む複合材料に対して有限要素法に基づく三次元応力解析を行い、その複合材料の巨視的な弾性係数を算出して、粒子構造および粒子間の相対的な距離が弾性係数に及ぼす影響を調べた。粒子は単純立方格子状、体心立方格子状、面心立方格子状に配置しているものとし、それぞれその一部からユニットセルを作成した。そのユニットセルに含まれる粒子径を変えることによって粒子間の相対的な距離を変化させた。ユニットセルに周囲の境界条件として強制変位を与えることによって生じる反力から縦弾性係数とポアソン比を求めた。得られた結果と Eshelby の等価介在物理論に基づく結果と比較を行い、その差異を示した。

計算例として、エポキシとガラスからなる二相複合材料を取り扱い、それらの混合比を変化させた場合について複合材料の巨視的な弾性係数がどのように変化するかを調べ、三種類の粒子構造による結果と Mori-Tanaka の平均場混合則および Self-consistent 法による結果を比較し

た。その結果、粒子が体心立方構造、面心立方構造、Mori-Tanaka の理論は、粒子が比較的接近する場合を除き、体積分率に対するすべての弾性係数の結果がほぼ一致した。粒子が単純立方構造の場合は、体積分率に対する縦弾性係数およびせん断弾性係数において Self-consistent 法による結果、体積弾性係数においては体心立方構造、面心立方構造、Mori-Tanaka の理論の結果とよい一致を示した。

そして、粒子間距離考慮して粒子半径で整理すると、いずれの弾性係数において、三種類の粒子構造、Mori-Tanaka の理論および Self-consistent 法のすべての結果でよい一致が得られた。

また、同程度の縦弾性係数を持ち、粒子が比較的密な場合において、局所的な応力が最も大きい粒子構造は単純立方であった。一方、最も小さい粒子構造は体心立方であり、単純立方の 60% 程の値であった。

#### 参考文献

- [1] 未踏技術協会・傾斜機能材料研究会：傾斜機能材料, 工業調査会, 1993
- [2] 上村誠一, 渡辺義見編著：図解 傾斜機能材料の基礎と応用, コロナ社, 2014
- [3] T. Mura : Micromechanics of Defects in Solids, Second, revised edition, Martinus Nijhoff, 1987
- [4] 呉亜東, 中垣通彦：微視的特性を考慮した粒子分散型複合材の弾塑性構成則モデル, 日本機械学会論文集 (A 編), 64-620, pp.1035-1042, 1998
- [5] 稲村栄次郎：等価介在物法に基づく粒子分散型複合材料の弾性係数の評価, 都立工業高等専門学校研究報告, 39, pp.7-12, 2003
- [6] D. Cioranescu and P. Donato : An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17, Oxford University Press, 2003
- [7] 寺田賢二郎, 菊池昇：日本機械学会編：均質化法入門, 丸善, 2003
- [8] 牧野正樹, 辻知章, 野田直剛：原子レベルの傾斜機能材料の分子動力学シミュレーション (材料組成を銅からニッケルへ線形に変化させた傾斜機能材料), 日本機械学会論文集 (A 編), 65-631, pp.567-574, 1999
- [9] 稲村栄次郎：球状粒子強化型複合材料の巨視的弾性係数の簡易評価 (FEM 解析と等価介在物理論の比較), 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, 12, pp.20-25, 2018
- [10] J. D. Eshelby : The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 24, pp.376-396, 1957
- [11] T. Mura and P. C. Cheng : Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion, Transaction of the Amer-

ican Society of Mechanical Engineers, *Journal of Applied Mechanics*, 44, pp.591–594, 1977

- [12] G. P. Tandon and G. J. Weng : Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration, *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, 53, pp.511–518, 1986
- [13] C. Geuzaine and J.-F. Remacle : Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79–11, pp.1309–1331, 2009
- [14] S. Yoshimura, R. Shioyab, H. Noguchic et al. : Advanced general-purpose computational mechanics system for large-scale analysis and design, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 149, pp.279–296, 2002