代数微分方程式の代数型函数解について，II

On algebroid solutions of algebraic differential equations, II

澤田 一成

Kazunari Sawada

（要旨）本論文では超越的代数型函数解をもつ代数微分方程式を考察し，その解や，解によってつくられる微分多項式の極の個数函数を評価する．そして与えられた代数微分方程式の係数がその解の値分布に与える影響を調べることにより，任意の解が高い位数の極を持たないための十分条件を与える．さらに，任意の値の重複指数の上からの評価式を証明する．

Keywords: Nevanlinna theory, Value distirbution theory, Algebroid functions, Algebraic differential equations, Differential polynomials.

1．はじめに

自然科学や工学の研究のみならず，他の多くの分野において，微分方程式は重要な道具であるが，与えられた微分方程式を積分を用いて解く方法，いわゆる求積法の確立された微分方程式は驚くほど僅かである．例えば，比較的簡単な構造をもつ線形微分方程式でさえ，その解が完全に記述できるのは定数係数，および何らかの変換を用いて定数係数の方程式に帰着できる場合に限られており，函数係数の場合はそのほとんどが解けない微分方程式である．演算子法や Laplace 変換による方法を用いても，状況はほぼ同様である．級数展開を利用する方法は解の局所的な振舞いを分析するには効果的であるが，大域的な解の構造を理解するのは困難である．一方，純粋数学的な観点で言えば，微分方程式は初等函数では記述できない未知の函数を構成する手段として早くから注目されてきた．Γ 函数，$\mathfrak{B}$ 函数，Bessel 函数，超幾何函数，楕円函数，Painlevé 函数など多くの例が知られている．この中には工学的にも重要な函数が数多く含まれているが，凡そ 100 年ほど前に発見された Painlevé 方程式が近年ある種の物理現象に現われたことで注目されている．ところが，Painlevé 方程式の解についても，その増大度の評価など未解決の問題が今も多く残されている．従って，与えられた微分方程式の解空間の構造やその解の性質，例えば，零点や極の分布，増大度の評価，特異点の有無，分岐点の構造などを明らかにし，また，逆にそのような函数を解とする方程式の特徴付けを与えることは，非常に興味ある問題であると思われる．

前論文 [5] に引き続き，本論文では値分布論 (Nevanlinna 理論) を主要な道具として微分方程式を調査する．値分布論を応用した微分方程式の研究では，これまで有理型函数解をもつ微分方程式が主に扱われてきた．しかしながら，一般の微分方程式の解は特異点や分岐点をもつ，言い換えれば，有理型函数解を持たない微分方程式が圧倒的多数である．

例．(1) $ww'+z=0$ の解は，$z^2+w^2=C$ であり，これは（非超越的）2 価代数型函数である．

(2) $z(w')^2-w^2=0$ の解は $w=Ce^{2\sqrt{z}}$ であり，これは（超越的）2 価代数型函数である．

(3) $3zw^2w''+2w'^2+2ww''+6zww'^2+6w^2w'=6x$ の解は $zw^3+w^2-z^3+C_1z+C_2=0$ であり，これは（非超越的）3 価代数型函数である．

そこで，本論文では，一般に可算無限個の代数分岐点を有する代数型函数を解とする微分方程式を考察する．代数型函数の概念や値分布論の記号については，Hayman[1]，Sawada[3]，Sawada[4]，Selberg[6] を，また有理型函数解をもつ複素微分方程式の研究については，Ishizaki[2] を参照されたい．

本論文では微分方程式

$$\Omega(z,w,w',\dots,w^{(n)})=0 \qquad (1)$$

を考察する．ただし，$\Omega(z,w,w',\dots,w^{(n)})$ は z の有理型函数を係数とする $w,w',\dots,w^{(n)}$ の多項式である．

都立産業技術高専　一般科

定義 1 ($S(r,w)$). $w(z)$ を代数型函数とする．実変数 r の実数値函数 $F(r)$ が

$$F(r)=S(r,w)$$

であるとは，

$$\lim_{r\to\infty, r\notin E}\frac{F(r)}{T(r,w)}=0$$

が成立することをいう．ただし，E は長さ有限の $\boldsymbol{R}$ の部分集合である．

定義 2 (admissible solutions). 微分方程式 (1) の解 $w=w(z)$ が **admissible** であるとは，(1) 式の任意の係数 $a_j(z)$ $(j\in J)$ に対して，$T(r,a_j)=S(r,w)$ $(j\in J)$ が成り立つことである．また，一般に $T(r,f)=S(r,w)$ をみたす函数 $f(z)$ を函数 $w(z)$ に関して **small** であるという．

定義 3 (個数函数). ν 価代数型函数 $w(z)$ の $|z|\le r$ 内にある極のうち，その位数が M より大きいものの個数を $n_{(M}(r,w)$，その位数が M 以下のものの個数を $n_{M]}(r,w)$ とするとき，

$$\begin{aligned}
N_{(M}(r,w) &:= \frac{1}{\nu}\int_0^r \frac{n_{(M}(t,w)-n_{(M}(0,w)}{t}dt+\frac{1}{\nu}n_{(M}(0,w)\log r,\\
N(r,w) &:= N_{(0}(r,w),\\
N_{M]}(r,w) &:= \frac{1}{\nu}\int_0^r \frac{n_{M]}(t,w)-n_{M]}(0,w)}{t}dt+\frac{1}{\nu}n_{M]}(0,w)\log r.
\end{aligned}$$

を函数 $w(z)$ の極の**個数函数**という．また，$a\in\mathbb{C}$ に対して，

$$N_{(M}(r,a,w):=N_{(M}(r,\frac{1}{w-a}),\ N(r,a,w):=N(r,\frac{1}{w-a}),\ N_{M]}(r,a,w):=N_{M]}(r,\frac{1}{w-a})$$

を函数 $w(z)$ の a 点の**個数函数**という．

定義 4 (total degree, weight). 微分多項式

$$\Omega(z,w,w',\ldots,w^{(n)})=\sum_{J\in\mathcal{J}}c_J(z)w^{j_0}(w')^{j_1}\cdots(w^{(n)})^{j_n}$$

を考える．ここで，$\mathcal{J}$ は添え字の組 $J=(j_0,j_1,\ldots,j_n)$ $(j_k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, k=0,1,\ldots,n)$ の有限集合である．このとき，

$$\gamma_\Omega:=\max_{J\in\mathcal{J}}(j_0+j_1+j_2\cdots+j_n),\quad \Gamma_\Omega:=\max_{J\in\mathcal{J}}(j_0+2j_1+3j_2+\cdots+(n+1)j_n)$$

をそれぞれ，Ω の **total degree**，**weight** という．

前論文 [5] において，微分方程式 (1) の admissible な解の近接函数 $m(r,w)$，および個数函数 $N(r,w)$ を調査し，以下の定理を証明した：

定理 A． 微分方程式 (1) が *admissible* な代数型函数解 $w=w(z)$ をもつとする．$Q(z,w)$ は $w(z)$ に関して *small* な有理型函数を係数とする w の既約多項式とし，$Q(z,w)\equiv 0$ で定義される函数要素は方程式 (1) をみたさないと仮定する．このとき次が成り立つ：

$$m(r,\frac{1}{Q})=S(r,w).$$

ただし，$Q(z):=Q(z,w(z))$ である．

定理 B． 微分方程式 (1) が *admissible* な ν 価代数型函数解 $w=w(z)$ で，ある正の定数 M に対して

$$N_{(M}(r,w)=S(r,w)$$

をみたすものを持つとする．定理 A と同様に $Q(z,w)$ は $w(z)$ に関して *small* な有理型函数を係数とする w の既約多項式で，$Q(z,w)\equiv 0$ で定義される函数要素は方程式 (1) をみたさないと仮定する．このとき次が成り立つ：

$$N_{(n\nu+1}(r,\frac{1}{Q})=S(r,w).$$

ただし，$Q(z):=Q(z,w(z))$ である．

定理 A, B において，$Q(z,w)=w-a$ $(a\in\mathbb{C})$ とすると，その系として次の結果が得られる：

系 C． $w=w(z)$ を微分方程式 (1) の *admissible* な代数型函数解とする．このとき，複素数 a が $\Omega(z,a,0,\dots,0)\neq 0$ をみたすならば次が成り立つ：

$$m(r,\frac{1}{w-a})=S(r,w).$$

系 D． $w=w(z)$ を微分方程式 (1) の *admissible* な代数型函数解とする．$\Omega(z,a,0,\dots,0)\neq 0$ をみたす任意の複素数 a は函数 $w=w(z)$ の *Nevanlinna* 除外値でない．

系 E． $w=w(z)$ を方程式 (1) の *admissible* な ν 価代数型函数解とし，ある正の定数 M に対して $N_{(M}(r,w)=S(r,w)$ が成り立つとする．このとき，$\Omega(z,a,0,\dots,0)\neq 0$ をみたす任意の複素数 a に対して，$w=w(z)$ のほとんど全ての a-点の位数は $n\nu$ 以下である．

定理 B や系 E において「$N_{(M}(r,w)=S(r,w)$ が成り立つような正の定数 M の存在」が仮定されている．しかしながら，いかなる微分方程式もこの条件をみたす admissible な解を持つとは限らない．また，仮にこの条件をみたす admissible な解が存在するとしても，それを事前にチェックすることは一般に容易ではない．そこで本論文では，この条件を取り除き，しかも容易にチェックできる十分条件を与える．即ち，次の定理を証明する：

定理 1. $f(z)$ を超越的代数型函数とする．$\Omega(z,f)$, $\Omega^*(z,f)$ は f の微分多項式で，その係数はそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 $c_J(z), J\in\mathcal{J}$, $c_I^*(z), I\in\mathcal{I}$ で，ある定数 M_0 に対して

$$N_{(M_0}(r,c_J)=S(r,f),\ J\in\mathcal{J},\quad N_{(M_0}(r,c_I^*)=S(r,f),\ I\in\mathcal{I}$$

が成り立つものとする．さらに $\Omega(z,f)$ の *total degree* が高々n，即ち $\gamma_\Omega\leq n$ とし，恒等式

$$\Omega^*(z,f(z))f(z)^n=\Omega(z,f(z)) \tag{2}$$

が成立するものとする．

このとき，ある定数 M が存在して，

$$N_{(M}(r,\Omega^*(z))=S(r,f(z))$$

が成り立つ．ここで，$\Omega^*(z):=\Omega^*(z,f(z))$ である．

定理 1 にある「各係数 $c_J(z)$, $c_I^*(z)$ が比較的小さな位数の極をもつ」という条件は，容易にチェックすることができる．さらに，微分方程式の型にある種の条件を付ければ，定理 1 と同様の方法で次の定理を証明することができる：

定理 2. $\Omega_1(z,w)$ を w の微分多項式とし，その係数は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数とする：

$$\Omega_1(z,w)=\sum_{J\in\mathcal{J}}c_J(z)w^{j_0}(w')^{j_1}\cdots(w^{(n)})^{j_n},$$

ただし，$J=(j_0,j_1,\dots,j_n)$．Ω_1 の唯一つの項が Ω_1 の *total degree* を与えるものと仮定する．さらに，微分方程式：

$$\Omega_1(z,w)=0$$

が *admissible* な代数型函数解 $w=w(z)$ を持つとする．

このとき，ある定数 $M>0$ が存在して，

$$N_{(M}(r,w)=S(r,w)$$

が成り立つ．

従って，定理 2，定理 B，系 C，および系 E を組合せることで，次の系が導かれる：

系 1. 定理 2 と同様に唯一つの項がその *total degree* を与える微分方程式 $\Omega_1(z,w,w',\dots,w^{(n)})=0$ の任意の *admissible* な ν 価代数型函数解 $w=w(z)$ に対して，$\Omega_1(z,a,0,\dots,0)\neq 0$ をみたす任意の複素数 a の個数函数は

$$N_{(n\nu+1}(r,a,w)=S(r,w)$$

をみたす．従って，a の重複指数 (*index of multiplicity*) $\theta(a,w)$ は

$$\theta(a,w)\leq 1-\frac{1}{n\nu}.$$

2. 定理 1 の証明

$\Omega^*(z)$ の極は，$\Omega^*(z,f)$ の係数 $c_J^*(z)(j\in\mathcal{J})$ の極，$f(z)$ の極，および $f(z)$ の極ではない分岐点のいずれかから生じる．そこで，$n^c(r,\Omega^*(z))$，$n^p(r,\Omega^*(z))$，$n^b(r,\Omega^*(z))$ を，それぞれ $|z|\leq r$ 内にある $\Omega^*(z)$ の極のうち，$\Omega^*(z,f)$ の係数から発生するものの個数，$f(z)$ の極から発生するものの個数，$f(z)$ の極でない分岐点から発生するものの個数とし，それらの個数函数をそれぞれ，$N^c(r,\Omega^*(z))$，$N^p(r,\Omega^*(z))$，$N^b(r,\Omega^*(z))$ とする．

先ず，係数の極に関する定理の条件から

$$N^c_{(M_0}(r,\Omega^*(z))=S(r,f). \tag{3}$$

次に $f(z)$ の極を考察する．そこで，$\Omega(z,f)=\sum_{J\in\mathcal{J}}\Phi_J$ とし，

$$\Phi_J:=c_J(z)f^{j_0}(f')^{j_1}\cdots(f^{(m)})^{j_m}$$

とする．ただし，Φ_J が $f^{(k)}$ を含まない場合には $j_k=0$ と考えることにより，$\Omega^*(z,f)$ の全ての項は上記のように与えられているとしてよい．さて，z_0 を $f(z)$ の極とし，

$$f(z)=\frac{c_p}{(z-z_0)^p}+\cdots$$

とすると，

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\frac{\tilde{c}_k}{(z-z_0)^k}+\cdots.$$

ここで，

$$\frac{\Phi_J}{f^n}=\frac{c_J(z)}{f^{n-\gamma_{\Phi_J}}}(\frac{f'}{f})^{j_1}\cdots(\frac{f^{(m)}}{f})^{j_m}$$

であるから，z_0 における函数 $*$ の極の位数を $\omega(z_0,*)$ と表すことにすると，

$$\omega(z_0,\frac{\Phi_J}{f^n})=\omega(z_0,c_J(z))+(-p)(n-\gamma_{\Phi_J})+\sum_{k=1}^{m}kj_k\leq\omega(z_0,c_J(z))+\sum_{k=1}^{m}kj_k.$$

ここで，定理の条件 $\gamma_\Omega\leq n$ より $(-p)(n-\gamma_{\Phi_J})\leq 0$ に注意する．恒等式 (2) の両辺を f^n で割って，両辺の z_0 における極の位数を考察すると，

$$\omega(z_0,\Omega^*)=\max_{j\in\mathcal{J}}\omega(z_0,\frac{\Phi_J}{f^n})\leq\max_{J\in\mathcal{J}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}+\omega(z_0,c_J)).$$

ここで，$\max_{J\in\mathcal{J}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J})=M_p$ と置くと，M_p は函数 $f(z)$ とは無関係で微分多項式 $\Omega(z,f)$ のみで定まる定数であり，先の考察から $\omega(z_0,\Omega^*)\leq M_p+\max_{J\in\mathcal{J}}\omega(z_0,c_J)$ が成り立つ．従って $\Omega^*(z)$ の極のうちその位数が M_p+M_0 より大きいものは，必ず係数 $c_J(z)$ の M_0 より大きい位数を持つ極となる．従って，(3) 式より

$$N^p_{(M_p+M_0}(r,\Omega^*(z))=S(r,f). \tag{4}$$

次に $f(z)$ の極でない分岐点を考察する．$\Omega^*(z,f)$ を次のように表す：

$$\Omega^*(z,f):=\sum_{I\in\mathcal{I}}\Phi_I^*(z,f),\quad \Phi_I^*:=c_I^*(z)(f)^{i_0}(f')^{i_1}\cdots(f^{(m)})^{i_m}.$$

ただし，$I=(i_0,i_1,\ldots,i_m)$ であり，Φ_I^* が $f^{(k)}$ を含まない場合には $i_k=0$ と考える．

z_0 を f の極でない分岐点とし，

$$f(z)=a+a_k(z-z_0)^{\frac{k}{\lambda}}+\cdots,\quad a_k\neq 0,\ \lambda>1,k>1$$

とする．

Case (1) $a=0$ の場合　簡単な考察から $k<m\lambda$ と仮定してよい．実際，$k\geq m\lambda$ ならば

$$f^{(i)}=a_k\frac{k}{\lambda}\cdots\frac{k-(i-1)\lambda}{\lambda}(z-z_0)^{\frac{k-i\lambda}{\lambda}}+\cdots\quad(i=1,2,\ldots,m)$$

に注意すると，$f^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ は $z=z_0$ に極を持たないことが分かる．従って，このような点における $\Omega^*(z)$ の極は $\Omega^*(z,f)$ の係数から生じるもののみであり，その個数函数は，(3) 式より，$S(r,f)$ で評価される．

そこで以下 $k<m\lambda$ と仮定する．(2) 式より，$\Omega^*=\Omega/f^n$．この右辺の極を調べることで Ω^* の極を評価する．ここで，

$$\Omega(z,f):=\sum_{J\in\mathcal{J}}\Phi_J,\quad \Phi_J:=c_J(z)(f)^{j_0}(f')^{j_1}\cdots(f^{(m)})^{j_m}$$

とする．

$$\frac{f^{(i)}}{f}=\frac{a_k\frac{k}{\lambda}\cdots\frac{k-(i-1)\lambda}{\lambda}(z-z_0)^{\frac{k-i\lambda}{\lambda}}+\cdots}{a_k(z-z_0)^{\frac{k}{\lambda}}+\cdots}=\frac{\frac{k}{\lambda}\cdots\frac{k-(i-1)\lambda}{\lambda}}{(z-z_0)^i}+\cdots$$

および，

$$\frac{\Phi_J}{f^n}=\frac{c_J(z)}{f^{n-\gamma_{\Phi_J}}}\Big(\frac{f'}{f}\Big)^{j_1}\cdots\Big(\frac{f^{(m)}}{f}\Big)^{j_m}$$

に注意して，

$$\begin{aligned}\omega(z_0,\frac{1}{f^n}\Phi_J)&=\omega(z_0,c_J)+\sum_{i=1}^{m}ij_i+\frac{k}{\lambda}(n-\gamma_{\Phi_J})\le\omega(z_0,c_J)+\sum_{i=1}^{m}ij_i+m(n-\gamma_{\Phi_J})\\&=\omega(z_0,c_J)+\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}+m(n-\gamma_{\Phi_J}).\end{aligned}$$

Case (2) $a\neq 0$ の場合　このとき，$1/f^n$ は $z=z_0$ で極を与えないから

$$\omega(z_0,\frac{1}{f^n}\Phi_J)=\omega(z_0,c_J)+\sum_{i=1}^{m}(i-\frac{k}{\lambda})j_i=\omega(z_0,c_J)+\sum_{i=1}^{m}ij_i-\frac{k}{\lambda}\sum_{i=1}^{m}j_i\le\omega(z_0,c_J)+\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}.$$

さて，Case (1)，Case (2) の考察より，

$$\omega(z_0,\frac{1}{f^n}\Omega)\le\begin{cases}\max_{J\in\mathcal{J}}(\omega(z_0,c_J)+\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}+m(n-\gamma_{\Phi_J})) & (a=0\text{ の場合}),\\ \max_{J\in\mathcal{J}}(\omega(z_0,c_J)+\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}) & (a\neq 0\text{ の場合}).\end{cases}$$

ここで，$\max_{J\in\mathcal{J}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}+m(n-\gamma_{\Phi_J}))$，および $\max_{J\in\mathcal{J}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J})$ の大きいほうを M_b と置くと，M_b は Ω, Ω^* のみに依存し，f には無関係に定まる定数であることに注意する．このとき，

$$\omega(z_0,\Omega^*)\le\max_{J\in\mathcal{J}}\omega(z_0,c_J)+M_b.$$

従って，$\Omega^*(z)$ の極のうちその位数が M_b+M_0 より大きいものは，必ず係数 $c_J(z)$ の M_0 より大きい位数を持つ極となる．従って，(3) 式より

$$N^p_{(M_b+M_0}(r,\Omega^*(z))=S(r,f). \tag{5}$$

(3)，(4)，(5) 式より，$M:=\max(M_0,M_p+M_0,M_b+M_0)$ とすれば，

$$N_{(M}(r,\Omega^*(z))\le N^c_{(M}(r,\Omega^*(z))+N^p_{(M}(r,\Omega^*(z))+N^b_{(M}(r,\Omega^*(z))=S(r,f).$$

（証明終り）

3. 定理 2 の証明

$$\Omega_1(z,w)=\sum_{J\in\mathcal{J}}\Phi_J,\quad \Phi_J:=c_J(z)w^{j_0}(w')^{j_1}\cdots(w^{(n)})^{j_n}$$

とし，$\Omega_1(z,w)$ の total degree を与える項を

$$\Phi_{I_0}=c_{I_0}(z)w^{i_0}(w')^{i_1}\cdots(w^{(n)})^{i_n}$$

とする．与えられた微分方程式 $\Omega_1(z,w)=0$ について，Φ_{I_0} のみを他辺に移項し，両辺を $w^{\gamma_{\Omega_1}-1}$ で割る．このとき，

$$w\cdot\Big(\frac{-\Phi_{I_0}}{w^{\gamma_{\Omega_1}}}\Big)\ \Big(=w\cdot\Big(\frac{w}{w}\Big)^{i_0}\Big(\frac{w'}{w}\Big)^{i_1}\cdots\Big(\frac{w^{(n)}}{w}\Big)^{i_n}\Big)\ =\sum_{J\in\mathcal{J}-\{I_0\}}\frac{\Phi_J}{w^{\gamma_{\Omega_1}-1}}.$$

$z=z_0$ を $w(z)$ の極とすると，定理 1 の証明中に示したのと同様の方法によって，

$$\begin{aligned}\omega\Big(z_0,w\cdot\Big(\frac{-\Phi_{I_0}}{w^{\gamma_{\Omega_1}}}\Big)\Big)\ (=\omega(z_0,w)+\omega(z_0,c_{I_0})+\Gamma_{\Phi_{I_0}}-\gamma_{\Omega_1})\ &\le\max_{J\in\mathcal{J}-\{I_0\}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J}+\omega(z_0,c_J))\\&\le\max_{J\in\mathcal{J}-\{I_0\}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J})+\max_{J\in\mathcal{J}}\omega(z_0,c_J).\end{aligned}$$

従って，

$$\omega(z_0,w)\le\max_{J\in\mathcal{J}-\{I_0\}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J})-\Gamma_{\Phi_{I_0}}+\gamma_{\Omega_1}+\max_{J\in\mathcal{J}}\omega(z_0,c_J).$$

ここで，$M:=\max_{J\in\mathcal{J}-\{I_0\}}(\Gamma_{\Phi_J}-\gamma_{\Phi_J})-\Gamma_{\Phi_{I_0}}+\gamma_{\Omega_1}$ と置くと，M は微分多項式 Ω_1 に依存して定まる定数であり，函数 w の M より大きい位数を持つ極は，必ず Ω_1 の係数 $c_J(z)$ の極となることが分かる．函数 $w(z)$ は微分方程式 $\Omega_1=0$ の admissible な解であるから，$N(r,c_J)\le T(r,c_J)=S(r,w)$．従って，

$$N_{(M}(r,w)\le\sum_{J\in\mathcal{J}}N(r,c_J)=S(r,w).$$

（証明終り）

系 1 の証明

与えられた微分方程式 $\Omega_1(z,w)=0$ は，その total degree を唯一つの項が与えるものとする．このとき，定理 2 の結論より，この微分方程式の任意の admissible な解 $w=w(z)$ に対して，

$$N_{(M}(r,w)=S(r,w)$$

をみたす正の定数 M が存在する．このとき，定理 B における admissible な解の極に関する条件がみたされるから，定理 B において $Q(z,w)=w-a$ $(a\in\mathbb{C})$ とすれば，

$$N_{(n\nu+1}(r,a,w)=S(r,w).$$

このとき，函数 $w=w(z)$ の a 点の重複度を無視して定めた個数函数を $\overline{N}(r,a,w)$ とすると，

$$N(r,a,w)=N_{n\nu]}(r,a,w)+S(r,w)\le n\nu\cdot\overline{N}(r,a,w)+S(r,w).$$

さらに，系 C より，$m(r,\frac{1}{w-a})=S(r,w)$ であるから，

$$N(r,a,w)=(1+o(1))T(r,w)$$

であることに注意して，

$$\begin{aligned}\theta(a,w)&=\liminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a,w)-\overline{N}(r,a,w)}{T(r,w)}\le\liminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a,w)-\frac{1}{n\nu}N(r,a,w)-\frac{1}{n\nu}S(r,w)}{T(r,w)}\\&=(1-\frac{1}{n\nu})\liminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a,w)}{T(r,w)}=(1-\frac{1}{n\nu})\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,w)}{T(r,w)}=1-\frac{1}{n\nu}.\end{aligned}$$

（証明終り）

4. 参考文献

[1] W.K.Hayman: Meromorphic functions, Clarendon Press, London, 1964

[2] K. Ishizaki: Meromorphic Solutions of Complex Differential Equations, University of Chiba, 1993

[3] K.Sawada: Picard constants of n–sheeted algebroid surfaces, Kodai Math.J.,25-2, pp113-138, 2002

[4] K.Sawada: 代数型函数の除外値について, 都立工業高等専門学校研究報告, 39, pp87-92, 2003

[5] K.Sawada: 代数微分方程式の代数型函数解について, 都立工業高等専門学校研究報告, 41, pp129-134, 2005

[6] H.L.Selberg: Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, 8, pp1-72, 1934