

球状粒子強化型複合材料の巨視的弾性係数の簡易評価 (FEM解析と等価介在物理論の比較)

Simple Evaluation of Macroscopic Elastic Moduli of Spherical Particles Reinforced Composites (Comparison between FEM Analysis and Equivalent Inclusion Theory)

稲村 栄次郎¹⁾

Eijiro Inamura¹⁾

Abstract: In this paper, macroscopic elastic properties of spherical particles reinforced composite material are simply evaluated using a three-dimensional analysis based on the finite element method and compared with theoretical ones based on the equivalent inclusion theory. In the numerical analysis, it is assumed that particles of the same size are arrayed in body-centered cubic. The volume fraction of composite material is determined by the radius of particle. A cube with regions equivalent to two particles is treated as a unit cell and given forced-displacement on its boundary surfaces. The macroscopic Young modulus and the macroscopic Poisson ratio of the composite material are obtained from reaction forces on the boundary surfaces. On the other hand, the macroscopic elastic properties are also calculated using the Mori-Tanaka theory and the self-consistent method which are based on the Eshelby equivalent inclusion theory. As an example, glass particle-reinforced epoxy matrix composites are considered. For elastic moduli, in consequence of comparison between the numerical results and ones obtained by the equivalent inclusion theory, the numerical results are coincident with ones of the Mori-Tanaka theory when particles are located apart from the others. On the other hand, when particles stick together, the numerical results approximate to ones of the self-consistent method with increasing the volumetric fraction of particles.

Keywords : Composite Material, Material Design, Elasticity, Finite Element Method, Equivalent Inclusion Theory

1. 緒言

傾斜機能材料は、異なる性質の材料の混合比を連続的かつ最適に変化させることによって設計される複合材料であり、機械の耐熱材や医療の素材などの広い用途への適用が期待されている [1]。そのため、材料設計の際には混合比の全範囲にわたって適用できる巨視的な弾性係数の簡便な評価方法が必要である。その評価方法については材料の混合形態によって幾つかの混合則が提案されてきた。特に、粒子状の介在相が母相に分散している粒子強化型複合材料については、その粒子形状を考慮した弾性係数の評価方法が提案されている [2-4]。また、非均質材料における微視的構造の解析から巨視的応答を得る均質化法も研究されている [5,6]。さらに、分子動力学法による解析モデルから巨視的な弾性係数が算出されている [7]。いずれの方法も、混合比の使用範囲が限られたり、取り扱いが複雑であったりするなど、弾性係数が容易に得にくい。

そこで本研究では、球状粒子を含む粒子強化型複合材料の三次元解析モデルを作成し、有限要素法による数値計算を行って、混合比の全範囲にわたる複合材料の巨視的な弾性係数を簡易評価した。粒子は体心立方格子状に配置していると仮定し、その一部からユニットセルを作成した。

そのユニットセルに含まれる粒子径を変えることによって粒子の占める割合を変化させた。ユニットセルを四面体要素にメッシュ分割し、周囲の境界条件として強制変位を与えることによって生じる反力から縦弾性係数とポアソン比を求めた。また、Eshelbyの等価介在物理論 [8]に基づくMori-Tanakaの平均場理論 [9]およびSelf-consistent法 [10]を用いて複合材料の巨視的な弾性係数を求めた。計算例として、エポキシとガラスからなる二相複合材料を取り扱い、それらの混合比によって複合材料の巨視的な弾性係数がどのように変化するかを調べた。有限要素法で得られた結果とEshelbyの等価介在物理論に基づく理論解と比較を行い、その差異について検討した。

2. 有限要素法解析

本研究において、粒子強化型複合材料に含まれる球状粒子は同一直径であり、体心立方格子状に配置されていると仮定する。図 1(a)に示すように、複合材料内に直交座標系 xyz を設け、その一部である立方体に注目する。この立方体に対して、 x 軸および z 軸に垂直な四つ面、 y 軸に垂直な一つの面の変位を拘束し、 y 軸に垂直なもう一つの面に強制変位 u_y を与える。さらに、問題の対称性から図 1(a)の破線で示

1) 東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科、機械システム工学コース

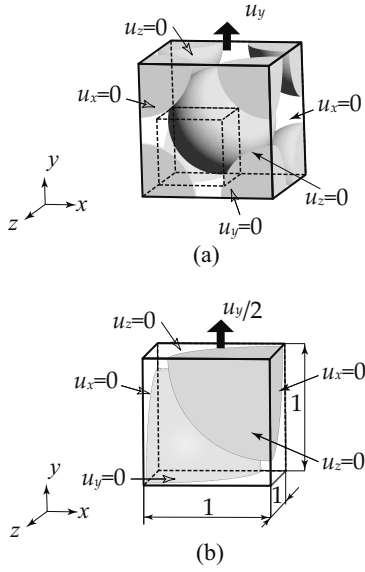


図1 有限要素法解析モデル

す立方体の8分の1の部分にモデルを縮小することができる。このモデルを図1(b)に示す一辺の長さが1であるユニットセルとして扱う。そして、強制変位 $u_y/2$ に 1×10^{-4} を与える。このユニットセルに対し有限要素法を適用し弾性応力解析を行う。三次元ソリッド要素として四節点四面体要素を用いてメッシュ分割を行い、それら要素の体積からユニットセルに対する粒子の体積分率 f を求める。

ユニットセル内に生じる垂直応力の x, y, z 方向成分の平均を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ で表す。同様に、ユニットセル内に生じる垂直ひずみの x, y, z 方向成分の平均を $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ で表す。そして、応力解析により得られた y 軸に垂直な面に作用する y 軸方向の反力の総和を σ_y に等しいと考える。 σ_x および σ_z についても同様に扱う。なお、問題の対称性から σ_x と σ_z は等しい。また、 y 軸に垂直な一つの面に与えた強制変位 $u_y/2$ を ε_y に等しいと考える。一方、 ε_x および ε_z は拘束されているため、 $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ である。

複合材料全体が等方性であると仮定し、巨視的な縦弾性係数およびポアソン比をそれぞれ \bar{E} および $\bar{\nu}$ で表すと、Hooke の法則より次の関係式が成り立つ。

$$\sigma_x = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_x + \bar{\nu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\} \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_y + \bar{\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\} \quad (2)$$

$$\sigma_z = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \{(1-\bar{\nu})\varepsilon_z + \bar{\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\} \quad (3)$$

そして、 \bar{E} および $\bar{\nu}$ は $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ の条件から $\sigma_x, \sigma_y, \varepsilon_y$ を用いて次のように求められる [7]。

$$\bar{E} = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)(2\sigma_x + \sigma_y)}{(\sigma_x + \sigma_y)\varepsilon_y} \quad (4)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_y} \quad (5)$$

有限要素解析において、メッシュ分割に三次元有限要素メッシュ生成ソフト `gmsht 1.56.2` [11], 応力解析には設計

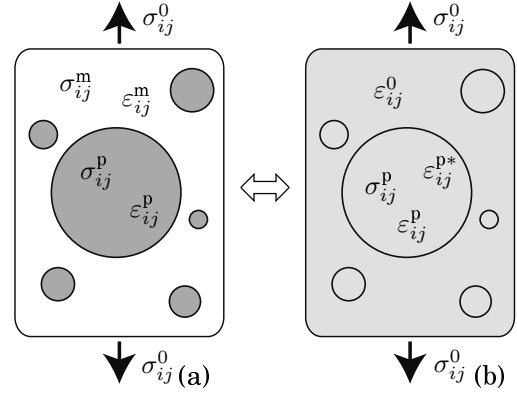


図2 等価材料モデル

用大規模計算力学システム `ADVENTURE` [12] を用いた。計算条件によって異なるが、節点は約3万点、要素は約16万個である。

3. 等価介在物理論

図2(a)に示すような母相の中に球状粒子が分散している複合材料を考える。本節では、指標表示を用いて応力やひずみの成分を示す。母相および粒子の体積弾性係数を κ^m, κ^p で表す。同様に、せん断弾性係数を μ^m, μ^p , ポアソン比を ν^m, ν^p で表す。複合材料の境界には一様に応力 σ_{ij}^0 が生じているものとする。一方、図2(b)に示すように、図2(a)の複合材料と同一の形状をもち、全体が一様な等方性の等価材料を考え、その体積弾性係数、せん断弾性係数およびポアソン比をそれぞれ κ^0, μ^0, ν^0 で表す。図2(a)の複合材料と同様に境界には応力 σ_{ij}^0 が作用しているものとする。等価材料内の平均応力は σ_{ij}^0 であり、平均ひずみ ε_{ij}^0 が生ずると考える。このとき、応力とひずみの関係に Hooke の法則が成立すると、

$$\sigma_{ij}^0 = \kappa^0 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0 + 2\mu^0 \varepsilon_{ij}^0 \quad (6)$$

ただし、 ε_{ij}^0 はひずみ ε_{ij}^0 の偏差成分を表し、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

粒子内の平均応力を σ_{ij}^p , 平均ひずみを ε_{ij}^p とする。また、 ε_{ij}^p と ε_{ij}^0 の差異を $\tilde{\varepsilon}_{ij}^p$ で表す。ここで、Eshelby の等価介在物理論 [8] により σ_{ij}^p は次式のように表すことができる。

$$\sigma_{ij}^p = \kappa^p \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kk}^p) + 2\mu^p (\varepsilon_{ij}^0 + \tilde{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (7)$$

$$= \kappa^0 \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^p) + 2\mu^0 (\varepsilon_{ij}^0 + \tilde{\varepsilon}_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{p'}) \quad (8)$$

$\varepsilon_{ij}^{p'}$ は粒子内の固有ひずみで、弾性的な不均質性を考慮するためのものである。そこで、 $\tilde{\varepsilon}_{ij}^p$ は $\varepsilon_{ij}^{p'}$ を用いて次式で表すことができる。

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{3} \alpha \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{p'} + \beta \varepsilon_{ij}^{p'} \quad (9)$$

ただし、球状粒子の場合、 α および β は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{1+\nu^0}{3(1-\nu^0)}, \quad \beta = \frac{2(4-5\nu^0)}{15(1-\nu^0)} \quad (10)$$

式 (9) を式 (8) に代入すると次式が得られる。

$$\sigma_{ij}^p = \kappa^0 \delta_{ij} \{ \varepsilon_{kk}^0 + (\alpha - 1) \varepsilon_{kk}^{p*} \} + 2\mu^0 \{ \varepsilon_{ij}^0 + (\beta - 1) \varepsilon_{ij}^{p*} \} \quad (11)$$

また、式 (9) を式 (7) に代入した式と式 (11) から、 ε_{ij}^{p*} は次式となる。

$$\varepsilon_{ij}^{p*} = -\frac{\kappa^p - \kappa^0}{3\{\kappa^0 + \alpha(\kappa^p - \kappa^0)\}} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0 - \frac{\mu^p - \mu^0}{\mu^0 + \beta(\mu^p - \mu^0)} \varepsilon_{ij}^0 \quad (12)$$

粒子の体積分率を f で表し、複合材料の平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ および平均ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ を、母相および粒子の応力およびひずみの線形混合則で表す。

$$\{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}\} = (1-f)\{\sigma_{ij}^m, \varepsilon_{ij}^m\} + f\{\sigma_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^p\} \quad (13)$$

また、複合材料の巨視的体積弾性係数および巨視的せん断弾性係数をそれぞれ $\bar{\kappa}$ および $\bar{\mu}$ で表す。

Mori-Tanaka の平均場理論 [9] に基づき、等価材料の弾性係数 κ^0 , μ^0 として複合材料の母相の弾性係数 κ^m , μ^m , 等価材料の平均ひずみ ε_{ij}^0 として複合材料の母相の平均ひずみを ε_{ij}^m とする、すなわち、 $\kappa^0 = \kappa^m$, $\mu^0 = \mu^m$, $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^m$ とすれば、 $\bar{\kappa}$ および $\bar{\mu}$ は、式 (7)~(13) から次式として得られる。

$$\bar{\kappa} = \kappa^m \frac{\kappa^m + \{f + (1-f)\alpha\}(\kappa^p - \kappa^m)}{\kappa^m + (1-f)\alpha(\kappa^p - \kappa^m)} \quad (14)$$

$$\bar{\mu} = \mu^m \frac{\mu^m + \{f + (1-f)\beta\}(\mu^p - \mu^m)}{\mu^m + (1-f)\beta(\mu^p - \mu^m)} \quad (15)$$

また、Self-consistent 法 [10] を用い、等価材料の弾性係数 κ^0 , μ^0 として複合材料の巨視的弾性係数 $\bar{\kappa}$, $\bar{\mu}$, 等価材料の平均ひずみ ε_{ij}^0 として複合材料の母相の平均ひずみを $\bar{\varepsilon}_{ij}$ とする、すなわち、 $\kappa^0 = \bar{\kappa}$, $\mu^0 = \bar{\mu}$, $\varepsilon_{ij}^0 = \bar{\varepsilon}_{ij}$ とすれば、 $\bar{\kappa}$ および $\bar{\mu}$ は、式 (7)~(13) から次式として得られる。

$$\bar{\kappa} = \kappa^m - f \frac{(\kappa^m - \kappa^p)\bar{\kappa}}{\bar{\kappa} + \alpha(\kappa^p - \bar{\kappa})} \quad (16)$$

$$\bar{\mu} = \mu^m - f \frac{(\mu^m - \mu^p)\bar{\mu}}{\bar{\mu} + \beta(\mu^p - \bar{\mu})} \quad (17)$$

得られた $\bar{\kappa}$, $\bar{\mu}$ より複合材料の巨視的縦弾性係数 \bar{E} および巨視的ポアソン比 $\bar{\nu}$ は、均質材料の弾性係数間の関係より次式で求められる。

$$\bar{E} = \frac{\bar{\mu}(9\bar{\kappa} - \bar{\mu})}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}} \quad (18)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3\bar{\kappa} - 2\bar{\mu}}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}} \quad (19)$$

4. 数値解析例

計算例として、エポキシとガラスからなる 2 相複合材料を取り扱った。それぞれの縦弾性係数 E およびポアソン比 ν , あるいは体積弾性係数 κ およびせん断弾性係数 μ

表 1 ガラスとエポキシの材料特性

	E GPa	ν	κ GPa	μ GPa
Glass	72.4	0.20	40.2	30.2
Epoxy	2.76	0.35	3.07	1.02
Glass/Epoxy	26.2	0.57	13.1	29.6

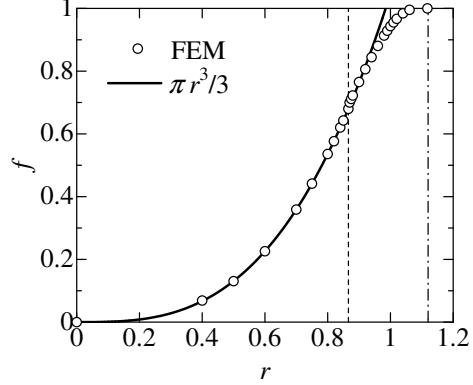


図 3 粒子の半径 r と体積分率 f の関係

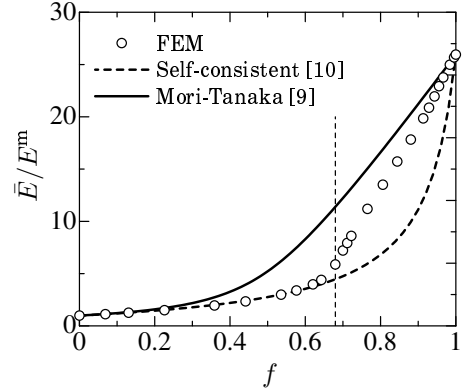


図 4 複合材料の巨視的縦弾性係数 \bar{E} と粒子の体積分率 f の関係

は表 1 に示す通りである [10]。また、表中にはエポキシに対するガラスの比を示した。ここでは、エポキシを母相、ガラスを粒子として扱った。

球状粒子の半径 r と体積分率 f の関係を図 3 に示す。白抜き丸印はメッシュ分割した後、粒子に相当する要素の体積を総和した値である。実線は球の 4 分の 1 の体積 $\pi r^3/3$ を示す線である。粒子は破線で示した $r = \sqrt{3}/2 = 0.866$ のときに隣の粒子とお互いに接触し合う。このときの体積分率は $f = \sqrt{3}\pi/8 = 0.680$ である。 $r > 0.866$ ($\sqrt{3}/2$) では球の重なった部分を削除し粒子が結合したものとして扱う。そして $r = \sqrt{5}/2 = 1.12$ (一点鎖線) のとき完全に粒子のみ状態となる。 $0 \leq r \leq 0.866$ ($\sqrt{3}/2$) では、要素の体積から求めた値と破線はよく一致しており、十分にメッシュ分割されている。

有限要素解析および等価介在物理論より得られた粒子の体積分率 f に対する複合材料の巨視的な縦弾性係数、ポアソン比、体積弾性係数、せん断弾性係数をそれぞれ図 4, 5, 6, 7 に示す。縦軸はそれぞれエポキシの値で除したものである。白抜き丸印は有限要素法解析から得られた結果である。破線および実線はそれぞれ Mori-Tanaka の

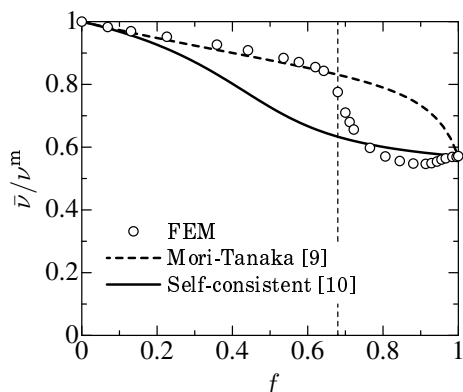


図5 複合材料の巨視的ポアソン比 $\bar{\nu}$ と粒子の体積分率 f の関係

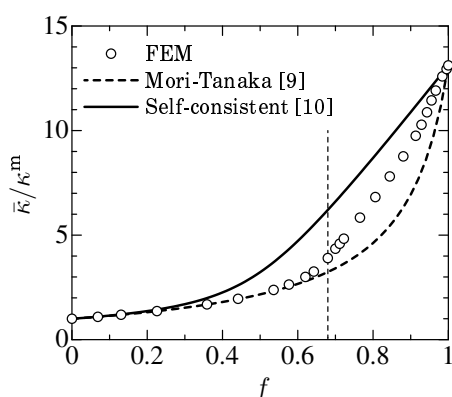


図6 複合材料の巨視的体積弾性係数 $\bar{\kappa}$ と粒子の体積分率 f の関係

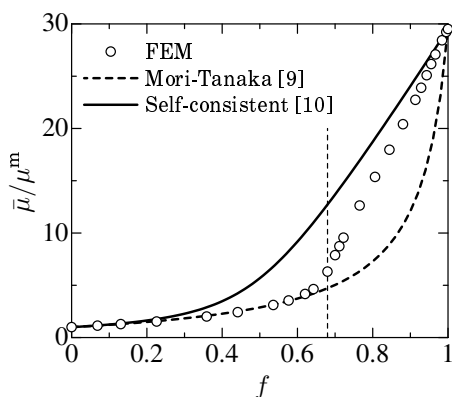


図7 複合材料の巨視的せん断弾性係数 $\bar{\mu}$ と粒子の体積分率 f の関係

理論および Self-consistent 法による結果である。先に述べたように破線で示した $f = 0.680 (\sqrt{3}\pi/8)$ は粒子が接触する場合の粒子の体積分率である。

有限要素法解析および Mori-Tanaka の理論による結果は、粒子が接触するまで体積分率の増加に伴い緩やかに増加しており、両者とも値がほぼ一致する。Self-consistent 法による結果は、 $f = 0.2$ 程度までは他の結果と近い値を示すが、 f が増加するにしたがって差異が徐々に大きくなり、 $f = 0.4$ を超えると急に大きくなる。Self-consistent 法は他の方法と比べて粒子の影響を過大に評価する。

粒子が接合している場合 $f \geq 0.680 (\sqrt{3}\pi/8)$ 、体積分率の

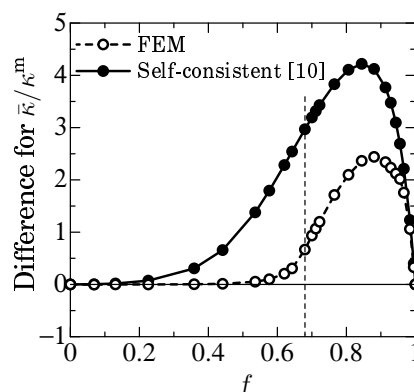


図8 複合材料の巨視的体積弾性係数 $\bar{\kappa}$ に関する Mori-Tanaka の理論との差異

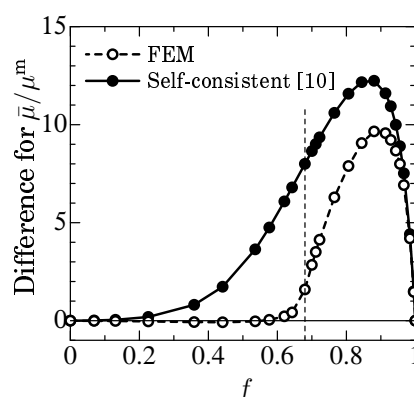


図9 複合材料の巨視的せん断弾性係数 $\bar{\mu}$ に関する Mori-Tanaka の理論との差異

増加に伴い、有限要素法解析による結果は、Mori-Tanaka の理論による結果から一度離れ、Self-consistent 法による結果に漸近する。このとき、巨視的なポアソン比 $\bar{\nu}$ は、ガラスのポアソン比より小さい値をとる場合がある。

Mori-Tanaka の理論との差異を明確にするため、複合材料の巨視的体積弾性係数 $\bar{\kappa}$ および巨視的せん断弾性係数 $\bar{\mu}$ に関して、有限要素法解析と Mori-Tanaka の理論による結果の差異、Self-consistent 法と Mori-Tanaka の理論による結果の差異を図8, 9に示す。複合材料の巨視的体積弾性係数 $\bar{\kappa}$ に関して、有限要素法解析の差異が明らかな場合は $f > 0.58$ であり、粒子が接触する体積分率 $f = 0.680 (\sqrt{3}\pi/8)$ よりやや小さい値からである。その最大差異は Self-consistent 法の60%である。それに対し、複合材料の巨視的せん断弾性係数 $\bar{\mu}$ に関して有限要素法解析の差異が明らかな場合は $f > 0.62$ であり、 $\bar{\kappa}$ の場合よりもやや大きい値からである。その最大差異は Self-consistent 法の約80%である。

結局、粒子が接合した状態では、その影響が考慮されていない等価介在物法の結果と有限要素法解析の結果の差異は無視できないが、粒子が接合せずに非常に接近した状態までは、Mori-Tanaka の理論で十分近似できると考えられる。

図10から図13には、相当応力の分布をコンター図で示したものである。左端のモデル図には視点を矢印で表

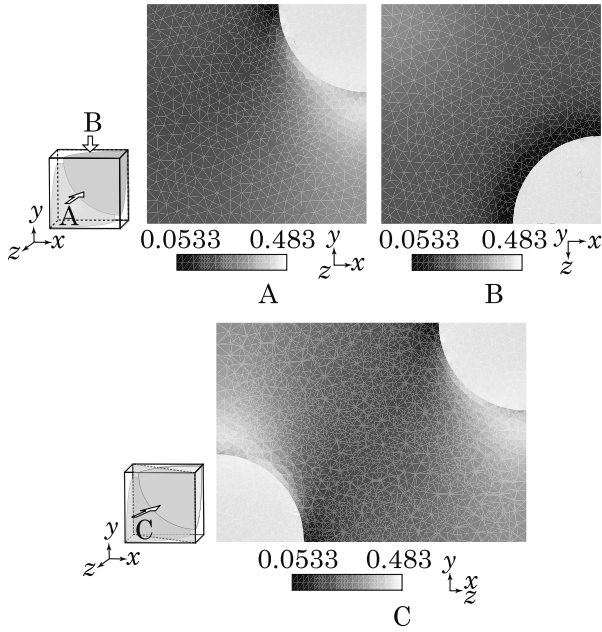


図 10 $r = 0.40, f = 0.069$ の場合の相当応力分布

しており、図 A は、 x 軸に垂直で x 軸の正を向いた面のコンター図である。図 B は、 y 軸に垂直で y 軸の正を向いた面のコンター図である。図 C は、 z 軸および y 軸に対して傾斜した面のコンター図である。各コンター図の下には、コンターバーを示しており数値の単位は MPa で相当応力の最小値から最大値までを範囲とする。要素内の相当応力は一定値で示している。

図 10 は $r = 0.40, f = 0.069$ の場合で、粒子同士が離れている状態である。粒子の最小値および最大値はそれぞれ 0.412 MPa および 0.483 MPa である。また母相内の最小値および最大値はそれぞれ 0.0533 MPa および 0.440 MPa である。粒子内で応力が最も高く、ほぼ一様に分布していることがわかる。母相内では図 A において粒子下部の部分の相当応力が大きい。また、粒子左側の隣接している部分の相当応力が小さい。 y 軸に垂直な断面を考えると、その断面に粒子が存在する場合は、縦弾性係数が大きい粒子の相当応力が大きい。一方、粒子が存在しない場合は、 y 軸方向に粒子が位置する母相で相当応力が大きい。

図 11 は $r = 0.866, f = 0.680$ の場合で、粒子同士が接触した状態である。粒子内の最小値および最大値はそれぞれ 0.893 MPa および 24.2 MPa である。また母相内の最小値および最大値はそれぞれ 0.0430 MPa および 18.8 MPa である。図 C において、粒子同士が接触した付近の相当応力が局所的に著しく大きくなる。そのため、他の粒子および母相の部分の相当応力が低く表示され、図 A および B においては、見かけ上相当応力の変化は小さい。若干、図 B の中央の粒子の部分の相当応力が大きい。

図 12 は $r = 0.98, f = 0.913$ の場合で、ポアソン比が最も小さい場合である。粒子の最小値および最大値はそれぞれ 1.33 MPa および 19.5 MPa である。また母相の最小値および最大値はそれぞれ 0.0986 MPa および 3.50 MPa

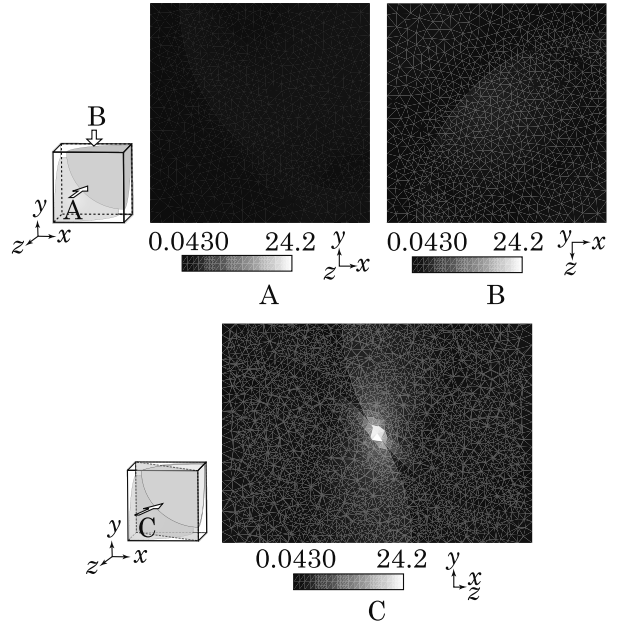


図 11 $r = 0.866, f = 0.680$ の場合の相当応力分布

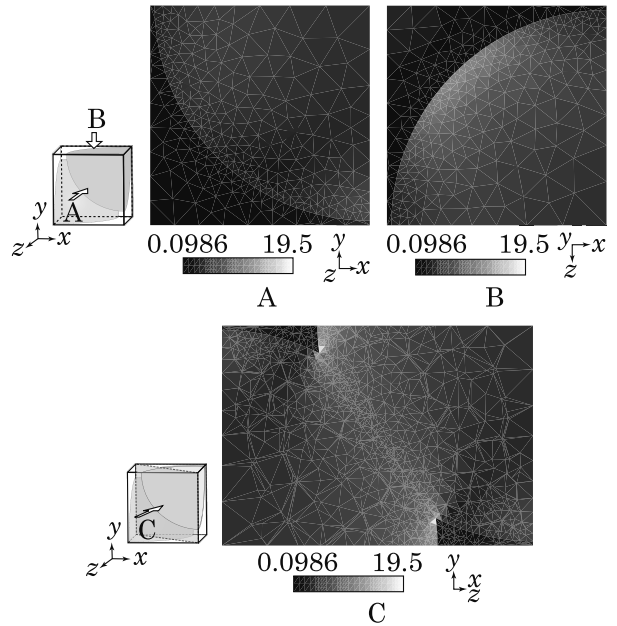


図 12 $r = 0.98, f = 0.913$ の場合の相当応力分布

である。図 C において、粒子同士が接続し、粒子がくびれた部分から y 軸方向の部分の相当応力が局所的に著しく大きくなる。また粒子内においても相当応力の変化がみられ、粒子がくびれた部分に比較的大きな相当応力が生じる。図 B では、面中心にある粒子と母相の境界付近で、粒子内の相当応力が大きい。一方、母相に生じる相当応力は小さいが、その最小値 0.0986 MPa は、図 10 および 11 に示した最小値 0.0533 MPa, 0.0430 MPa より大きい。

最後に、図 13 は $r = 1.00, f = 0.943$ の場合で、粒子の半径とユニットセルの辺の長さが一致する場合である。粒子の最小値および最大値はそれぞれ 1.07 MPa および 18.4 MPa である。また母相の最小値および最大値はそれぞれ 0.118 MPa および 8.44 MPa である。図 12 の $r = 0.98,$

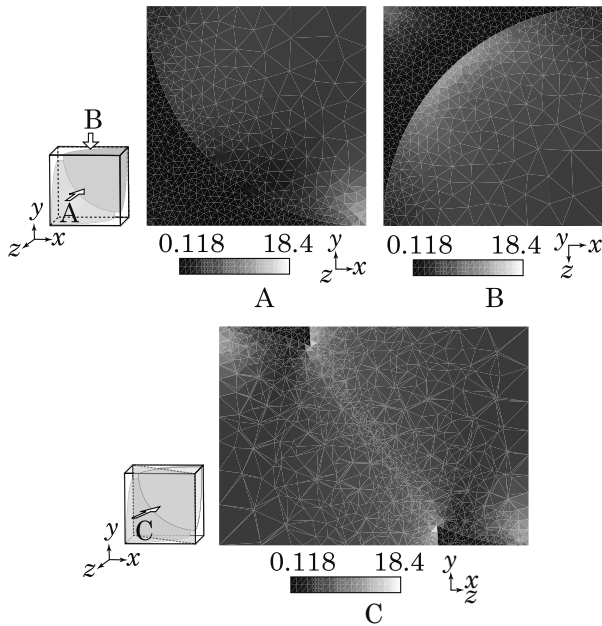


図 13 $r = 1.00$, $f = 0.943$ の場合の相当応力分布

$f = 0.913$ の場合と同様に、粒子同士が接続し、粒子がくびれた部分から y 軸方向の部分の相当応力が局所的に大きい。図 B においても、面中心の粒子と母相の境界付近で相当応力が大きい。加えて、 y 軸に垂直な境界面と接している部分である図 A の右下付近、図 C の左上および右下付近の相当応力が大きい。母相内に生じる相当応力は小さく、最小値 0.118 MPa は示した図の中で最も大きい。

4. 結 言

本研究では、球状粒子を含む粒子強化型複合材料の三次元解析モデルを作成し、有限要素法による数値計算を行って、混合比の全範囲にわたる複合材料の巨視的な弾性係数を簡易評価した。粒子は体心立方格子状に配置したユニットセルを作成し、その周囲境界条件に強制変位を与えたときに生じる反力から複合材料の巨視的な縦弾性係数およびポアソン比を求めた。また、Eshelby の等価介在物理論に基づく Mori-Tanaka の平均場混合則および Self-consistent 法による複合材料の巨視的な弾性係数の理論式を示した。

計算例として、エポキシとガラスからなる二相複合材料を取り扱い、それらの混合比を全範囲にわたって変化させた場合について複合材料の巨視的な弾性係数がどのように変化するかを調べ、有限要素法による結果と Mori-Tanaka の平均場混合則および Self-consistent 法による結果を比較した。その結果、粒子がある程度接近するまでは、有限要素法と Mori-Tanaka の理論の結果がほぼ一致する。また、粒子内の相当応力がほぼ一定である。一方、粒子が非常に接近した状態および接合した状態では、有限要素法解析による結果は Mori-Tanaka の平均場混合則と Self-consistent 法の中間の値をとり、特に、縦弾性係数とせん断弾性係数は粒子の体積分率の増加に伴って Self-consistent 法の結果に漸近する。ただし、ポアソン比

は粒子あるいは母相より小さくなる場合がある。また、粒子内の相当応力が一定でない。

参考文献

- [1] 未踏科技術協会・傾斜機能材料研究会：傾斜機能材料, 工業調査会, 1993
- [2] T. Mura : Micromechanics of Defects in Solids, Second, revised edition, Martinus Nijhoff, 1987
- [3] 呉亜東, 中垣通彦：微視的特性を考慮した粒子分散型複合材の弾塑性構成則モデル, 日本機械学会論文集 (A 編), 64-620, pp.1035-1042, 1998
- [4] 稲村栄次郎：等価介在物法に基づく粒子分散型複合材料の弾性係数の評価, 都立工業高等専門学校研究報告, 39, pp.7-12, 2003
- [5] D. Cioranescu and P. Donato : An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17, Oxford University Press, 2003
- [6] 寺田賢二郎, 菊池昇：日本機械学会編：均質化法入門, 丸善, 2003
- [7] 牧野正樹, 辻知章, 野田直剛：原子レベルの傾斜機能材料の分子動力学シミュレーション (材料組成を銅からニッケルへ線形に変化させた傾斜機能材料), 日本機械学会論文集 (A 編), 65-631, pp.567-574, 1999
- [8] J. D. Eshelby : The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 24, pp.376-396, 1957
- [9] T. Mura and P. C. Cheng : The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics , 44, pp.591-594, 1977
- [10] G. P. Tandon and G. J. Weng : Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, 53, pp.511-518, 1986
- [11] C. Geuzaine and J.-F. Remacle : Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 79-11, pp.1309-1331, 2009
- [12] S. Yoshimura, R. Shioyab, H. Noguchic et al. : Advanced general-purpose computational mechanics system for large-scale analysis and design, Journal of Computational and Applied Mathematics, 149, pp.279-296, 2002