

# 円柱導体による散乱現象を用いた同相写像 FDTD 法の検証

A Verification of Homeomorphic FDTD through EM Field Scattered by a Conducting Cylinder

宮田 尚起<sup>1)</sup>, 葛西 陽介<sup>2)</sup>  
Naoki Miyata, Yosuke Kasai

**Abstract:** In this paper, we proposed a Homeomorphic-Finite-Difference-Time-Domain(Hom-FDTD) method which promote proving a direct relation between electromagnetic phenomena and geometry. That relation is fundamental in developing radio/optical devices such as filter or metamaterials. The proposed Hom-FDTD method is one of FDTD methods in curvilinear coordinates, particularly, a mapping used in the Hom-FDTD has one-to-one, continuous and topology preserving property. Hence the method is not restricted by problems of coordinate singular points. And by evaluating a mapping, a geometry of model becomes mathematically clear. To verify the character of the method, experimentally an electromagnetic scattering from a perfectly conducting cylinder is discussed through comparative experiment with two other ordinary method in viewpoint of spacial and temporal observation. At this experiment, in the method, the cylinder is modeled by homeomorphism from square cylinder. One of way to determine the homeomorphism is also proposed. As a consequence, analysis with the method shows suitable characteristics, and modeling using the method is as accurate as those using polar coordinate, we confirmed

**Keywords:** metamaterial, FDTD analysis, mapping, homeomorphism

## 1 はじめに

電磁気現象を用いた様々なデバイスは、ある決まった形状をした構造物であり、これらデバイスの設計は所定の電磁氣的性質を実現するための構造物の形状を決定することに帰する。例として分割リング共振器 (Split Ring Resonator; SRR)[1], [2] があり, SRR は共振周波数近傍で負の実効透磁率を実現するデバイスとしてメタマテリアル [3] の構成要素に用いられる。分割リング共振器は典型的にはリング状の共振器であるが, Rose Curve と呼ばれる形状の SRR[4] も存在し, Rose Curve の形状を決めるパラメータごとに異なる周波数-実効透磁率特性が得られる。以上は一例であるが, これより構造物の電磁気現象と構造物の形状との間に対応をつけられると考えられる。したがって, 無線通信機器に不可欠なフィルタ・アンテナや, 無線技術および光学技術の開発に高いポテンシャルを持つメタマテリアルの設計を直観的かつ簡便にするため, 構造物の電磁氣的性質 (e.g. S パラメータの周波数特性) を構造物の形状によって直接記述することが求められており, 本研究では特に SRR の形状による共振周波数および実効透磁率の変化を調べることを目的とする。この問題に対するアプローチとして, 解析においてモデルの連続変形を容易に実現し, かつ, モデルの形状

の数学的な評価に適した解析法が必要である。我々はそのような解析法として, 同相写像 FDTD(Homeomorphic Finite Time Difference Time Domain; Hom-FDTD) 法を提案する。同相写像とは, 集合間に定義される全単射の連続写像であって, 集合の位相的性質を保存するものをいう。例えば, 集合  $A$  と集合  $B$  の位相を開集合によって定めるとき, 集合  $A$  の開集合は同相写像  $f: A \rightarrow B$  で集合  $B$  へうつされても集合  $B$  の開集合となる。直観的には, 領域  $A$  から領域  $B$  への写像であって, 領域  $A$  の形状に対する連続変形で領域  $B$  の形状を構成できるような写像は同相写像である。さらに, 2つの領域の間に同相写像が存在する場合, それらの領域は同相であるという。

提案手法である Hom-FDTD 法は, モデリングした構造物を同相写像によって別な形状の構造物へ写像し, 写像後の構造物について FDTD 解析をする方法である。Hom-FDTD 法による解析をすることで, 解析のたびにモデルの形状を変えることが不要となる。また, 写像前のモデルを計算機で扱いやすい長方形とすれば, 写像後のモデルには階段近似が含まれない。なお, 曲面に対する高精度な FDTD 解析については [5]-[9] などで多く研究されている。特に, 高い精度でモデリングができる FDTD 法として Contour-Path FDTD 法 [5] や Conformal FDTD 法 [6] などが提案されているが, これらはモデルに合わせてグリッドを変形する方法であるため, モデルの形状を数

<sup>1)</sup>東京都立産業技術高等専門学校ものづくり工学科

<sup>2)</sup>新潟大学理学部数学科

学的に扱う上で不適である。これに対して Hom-FDTD 法では、写像前のモデルの形状を固定すれば、写像後の構造物、すなわち解析対象の構造物の形状は同相写像そのものとして評価できるため、“構造物の形”なる概念の数学的実体が明瞭となる。さらに、写像を記述する方程式系に含まれるパラメータを連続的に変化させることで、写像後の構造物の形状を連続的に変えることができる。以上より Hom-FDTD 法は、モデルの形状ごとの解析結果を機械的に蓄積しつつ、直交グリッドに起因する階段近似が伴う通常の FDTD 解析よりも高精度なモデリングが実現できる解析法として、上述した我々の問題を解決する良い手段となることが期待される。

Hom-FDTD 法は曲線座標を用いた FDTD 法 [9] の一種であるが、曲線座標として広く用いられる座標には極座標があり、極座標は円形の構造物を解析する際に有用である。しかし、物理学および工学において実用的な曲線座標の多くは特異点を持ち、極座標も座標原点に特異点を持つ。特異点はタイムステップの問題から解析領域に含めることができないため、特異点を持つ座標による FDTD 解析では解析できるモデルの形状が制限される。したがって、極座標による FDTD 法では円柱は精度よく解析できるが、リング状の構造物は直接解析できない。この問題は、長方形のリングを円形のリングへうつすような同相写像による Hom-FDTD 解析で解決される。

Hom-FDTD 法の実用化に向けて、本論文では Hom-FDTD 法による解析の実例を示すことを目的とし、次の 3 点について報告する：(1) 同相写像を決定する一手法；(2) 正方形を円にうつす同相写像の定式化；(3) 決定した同相写像による Hom-FDTD 法の有効性。(3) については、完全導体の無限長円柱による散乱で生じた電磁界分布を、Hom-FDTD 法と極座標による FDTD 法、直交グリッドによる通常の FDTD 法の 3 つの方法ごとに計算し、計算結果を比較することで検証した。

本論文における説明のため、表 1 のように記号を定義し、定義した記号は本論文を通して使用する。なお、写像を表す文字には、本論文で報告する FDTD 解析で用いた写像に限って大文字を用いる。

## 2 Hom-FDTD 法の基本原理

### 2.1 FDTD 法

本研究の目的を達成するためには、構造物の形状がその電磁氣的性質に及ぼす影響を調べることが重要となる。そのために、異なる形状の構造物モデルを複数用意し、同一の条件で観測した電磁氣現象を構造物モデルの形状ごとに比較することによって、構造物の形状とその

表 1: 本論文を通して使用する記号の一覧

記号	意味
$a \in A$	$a$ は $A$ の要素
$A \subseteq B$	$A$ は $B$ の部分集合
$A \cup B$	$A$ と $B$ の和集合
$A \cap B$	$A$ と $B$ の共通部分
$A - B$	$A$ から $B$ の要素を差し引いた集合
$A \times B$	$A$ と $B$ の直積
$\{a\}$	$a$ ただ 1 つを要素にもつ集合
$\mathbb{N}$	自然数全体
$\mathbb{Z}$	整数全体
$\mathbb{R}$	実数全体
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$
$(x^1, \dots, x^n)$	Physical Space の任意の点
$(u^1, \dots, u^n)$	Virtual Space の任意の点
$\xi^1, \xi^2$	rectilinear 座標
$r, \theta$	極座標
$f_p$	極座標への座標変換
$F_r$	rectilinear 座標への座標変換
$F_p$	適当に制限された極座標への座標変換
$F_h$	本論文で示す Hom-FDTD 法による解析で用いる同相写像
$\text{dom}(f)$	写像 $f$ の定義域

電磁氣的性質との関係を調べる必要がある。そこで我々は構造物モデルの変形に座標変換を用いることが有効であることを見出し、FDTD 法は座標変換を用いた解析に特に適した解析法である。

FDTD 法のアルゴリズムは、電磁氣現象の支配方程式である Maxwell の方程式のうち、電磁界の回転を記述する方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (2)$$

を差分化することで構成される。Hom-FDTD 法は曲線座標による FDTD 法の一つであり、曲線座標による FDTD 法の場合は曲線座標で記述された Maxwell の方程式 [9]

$$\varepsilon \frac{\partial E^\lambda}{\partial t} + \sigma E^\lambda = \sqrt{\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}} \left( \frac{\partial \tilde{H}_{\lambda-1}}{\partial u^{\lambda+1}} - \frac{\partial \tilde{H}_{\lambda+1}}{\partial u^{\lambda-1}} \right), \quad \tilde{H}_\lambda = \frac{H_\lambda}{\sqrt{g^{\lambda\lambda}}} \quad (3)$$

$$-\mu \frac{\partial H^\lambda}{\partial t} - \sigma^* H^\lambda = \sqrt{\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}} \left( \frac{\partial \tilde{E}_{\lambda-1}}{\partial u^{\lambda+1}} - \frac{\partial \tilde{E}_{\lambda+1}}{\partial u^{\lambda-1}} \right), \quad \tilde{E}_\lambda = \frac{E_\lambda}{\sqrt{g^{\lambda\lambda}}} \quad (4)$$

$$E_i = \sum_{k=1}^3 G_{ik} E^k \quad (5)$$

$$H_i = \sum_{k=1}^3 G_{ik} H^k \quad (6)$$

$$G_{ik} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{g^{ii}}} g_{ik} \quad (7)$$

を差分化することで計算アルゴリズムを構成する。ただし、 $\lambda$  は  $\{1,2,3\}$  の値をサイクリックにとり、例として  $\lambda = 1$  ならば  $\lambda - 1 = 3$ ,  $\lambda + 1 = 2$  である。また、 $E^\lambda$  および  $H^\lambda$  は電界および磁界の反変成分、 $E_\lambda$  および  $H_\lambda$  は電界および磁界の共変成分であり、 $[g_{ik}]$  は計量テンソルである。 $[g_{ik}]$  は

$$[g_{ik}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \circ x^1 \\ \circ x^2 \\ \circ x^3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

で表され、 $[g^{ik}] = [g_{ik}]^{-1}$ ,  $g = \det([g_{ik}])$  である。

## 2.2 Physical Space および Virtual Space

一般に座標変換とは、変形と直接関係しない概念である。しかしながら、ここで説明する Physical Space と Virtual Space なる 2 つの空間を考えることで、領域の仮想的な変形を考えられる。

座標変換は、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合で定義され、 $\mathbb{R}^n$  に値を持つ写像である。この際、両空間は物理的意味において区別できる。すなわち、我々が直接観測できる Physical Space と、Physical Space に属する点の座標  $(x^1, \dots, x^n)$  の測り方を与えるパラメータ  $u^1, \dots, u^n$  を軸にとった Virtual Space とに区別できる。Physical Space と Virtual Space について、極座標  $r, \theta$  による例を与える。2次元の Physical Space に属する任意の 1 点  $(x^1, x^2)$  を極座標  $r, \theta$  による表示へ変換する写像  $f_p$  は、

$$f_p: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \quad (10)$$

と定まる。いま、Physical Space における領域  $D$  を次のように与える：

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x^1, x^2) \mid \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \leq R \right\} \\ &= \{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \mid 0 \leq r \leq R \wedge \theta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ f_p(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R \wedge \theta \in \mathbb{R} \} \\ &= f_p(D'), \end{aligned} \quad (11)$$

$$D' = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R \wedge \theta \in \mathbb{R} \}. \quad (12)$$

$D$  は、Physical Space における半径  $R$  かつ原点中心の円盤である。一方で、 $D$  に対応する Virtual Space の領域  $D'$  は、 $\theta$  方向に無限の長さを持ち、 $r$  方向に  $R$  の幅を持つ長方形である。 $D$  および  $D'$  を図 1 に示す。図 1 より、 $D'$  は座標変換  $f_p$  によって  $D$  へ仮想的に変形したと考えることができる。しかしながらこの性質は、ある構造物を、計算機上でより扱いやすい形状の構造物としてモデリングできることを意味する。曲線座標による FDTD 法はこの性質を利用した解析法であって、言い換えれば FDTD

解析を Virtual Space で行うものである。また、Physical Space と Virtual Space では異なる物理法則に支配される。極座標の例では、一様な媒質で充填された Physical Space で 1 点を励振して生じる波紋は Physical Space では円形であるが、Virtual Space では  $\theta$  軸に平行な直線となる。

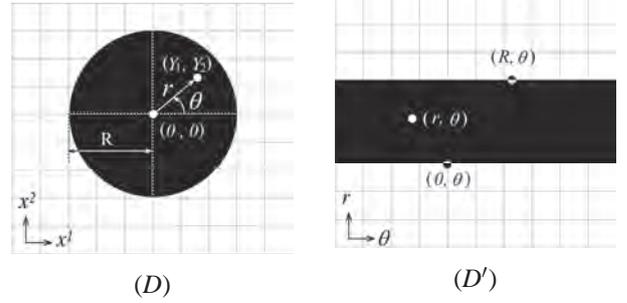


図 1: 座標変換による領域の形状の変化の例 (極座標)

## 2.3 座標曲線と領域の変形

$(x^1, x^2) = f(u^1, u^2)$  なる関係があるとき、1 つのパラメータ  $u^i$  を固定し、他方のパラメータ  $u^k$  を動かした際に  $(x^1, x^2)$  の定める 1 点の軌跡は 1 次元の空間、すなわち曲線をなす。このような曲線を座標曲線とよぶ。座標曲線を定義するため、まず Virtual Space において 1 つのパラメータを動かして得られる直線を定義する。

$i = 1, 2$  に対して  $I_i$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とし、座標変換  $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が与えられているとする。 $\text{dom}(f) = I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  で、 $\text{dom}(f)$  は  $f$  の定義域である。また、 $A_1$  および  $A_2$  をそれぞれ  $I_1$  および  $I_2$  の部分集合とし、 $\text{dom}(f)$  において  $i$  番目の軸に平行な方向を  $u^i$  方向とよぶ。いま、 $\text{dom}(f)$  のある 1 点  $a := (a_1, a_2)$  を  $A_i$  の中にわたって動かせば、点  $a$  の軌跡は  $u^i$  方向に伸びる直線となる。したがって、 $i = 1, 2$  に対して  $\mathcal{C}_i(f; A_1, A_2)$  を、 $\text{dom}(f)$  における領域  $A_1 \times A_2$  に描かれた  $u^i$  方向の直線として次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(f; A_1, A_2) &:= \{ A_1 \times \{a\} \mid a \in A_2 \}, \\ \mathcal{C}_2(f; A_1, A_2) &:= \{ \{a\} \times A_2 \mid a \in A_1 \}. \end{aligned} \quad (13)$$

$i = 1, 2$  に対し、 $\mathcal{C}_i(f; I_1, I_2)$  は単に  $\mathcal{C}_i(f)$  と書く。また、 $\mathcal{C}_i(f; A_1, A_2)$  の各要素は、 $\text{dom}(f) = I_1 \times I_2$  に含まれる領域  $A_1 \times A_2$  において 2 個のパラメータ  $u^1, u^2$  のうち 2 番目のパラメータ  $u^2$  を一定値に固定し、 $u^1$  を  $A_1$  の中で動かして得られる軌跡であり、 $\mathcal{C}_2(f; A_1, A_2)$  の要素も同様である。さらに、 $\mathcal{C}(f; A_1, A_2)$  を

$$\mathcal{C}(f; A_1, A_2) := \mathcal{C}_1(f; A_1, A_2) \cup \mathcal{C}_2(f; A_1, A_2) \quad (14)$$

と定義すれば、この集合は  $A_1 \times A_2$  の中で描かれる直線の全体となる。例として  $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$  とし、 $A_1 = [1, 3]$ ,  $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$  とすれば、 $\mathcal{C}(g; A_1, A_2)$  の全要素は図2のように描かれる。図2に示されているように、 $I_i$  が  $\mathbb{R}$  の区間ならば  $\mathcal{C}_i(f; I_1, I_2)$  の各要素は **Virtual Space** における連続した直線を描くが、 $I_i$  が有限(または可算)集合ならば  $\mathcal{C}_i(f; I_1, I_2)$  の各要素は **Virtual Space** の直線上に並んだ離散的な点の集まりとなる。しかし、このような離散的な点の並びも、本論文では広義の直線と考える。

$f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A_i \subseteq I_i$  ( $i = 1, 2$ ) とするとき、

$$\begin{aligned} f(\mathcal{C}_1)(A_1, A_2) &:= \{f(A_1 \times \{a\}) \mid a \in A_2\} \\ &= \{\{f(x, y) \mid x \in A_1\} \mid y \in A_2\}, \\ f(\mathcal{C}_2)(A_1, A_2) &:= \{f(\{a\} \times A_2) \mid a \in A_1\} \\ &= \{\{f(x, y) \mid y \in A_2\} \mid x \in A_1\} \end{aligned} \quad (15)$$

と定義された集合  $f(\mathcal{C}_1)(A_1, A_2)$  の各要素は、 $\text{dom}(f)$  に含まれる領域  $A_1 \times A_2$  の中で点  $(a_1, a_2)$  を  $u^1$  方向に動かしたときに点  $f(a_1, a_2)$  が  $\mathbb{R}^2$  に描く軌跡である。 $f(\mathcal{C}_2)(A_1, A_2)$  についても同様である。このような軌跡は  $f$  による  $u^i$  方向の座標曲線であり、以降では  $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  であるときに  $f(\mathcal{C}_i)(I_1, I_2)$  の各要素を単に、座標変換  $f$  における  $u^i$  方向の座標曲線とよぶ。また、

$$f(\mathcal{C})(A_1, A_2) := f(\mathcal{C}_1)(A_1, A_2) \cup f(\mathcal{C}_2)(A_1, A_2) \quad (16)$$

なる集合は、座標変換  $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $A_1 \times A_2$  に制限した場合に  $\mathbb{R}^2$  に描かれる座標曲線の全体である。例として、 $A_1 = \{0, R_1, R_2, \dots, R_6\} \subseteq \mathbb{R}_+$ ,  $A_2 = \{0, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_5\} \subseteq \mathbb{R}$  なる集合を与える。このとき、 $f_p(\mathcal{C})(A_1, A_2)$  および  $\mathcal{C}(f_p; A_1, A_2)$  の各要素は図3および図4のようにプロットされる。図3および図4には座標曲線とともに領域  $D_1, D_2, D'_1, D'_2$  が示されており、 $D'_i = f_p(D_i)$  ( $i = 1, 2$ ) である。図4に示された  $D_1$  および  $D_2$  は、いずれも  $\mathcal{C}(f_p; A_1, A_2)$  の要素である直線がなす交点を頂点とし、各頂点を  $r$  および  $\theta$  方向の直線で結んで得られる長方形である。このような長方形は、**Virtual Space** におけるセルに他ならない。ただし、この例では  $A_1$  および  $A_2$  が有限集合であることによって **Virtual Space** は離散的なので、 $D_1$  および  $D_2$  なる長方形の辺をなすような連続的な直線は  $\mathcal{C}(f_p; A_1, A_2)$  に含まれず、 $D_1$  および  $D_2$  は **Virtual Space** に含まれない。しかしながら、前述のように、直線状の離散的な点の並びも広義の直線と考えることで、頂点の集合自体をセルと考えられる。よって本論文では、座標変換  $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ ) と任意の  $A_i \subseteq I_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対し、次なる集合の要素を **Virtual Space** におけるセルとして扱う：

$$\begin{aligned} \text{Cell}(f; A_1, A_2) &:= \left\{ (u^1, v^1) \times (u^2, v^2) \mid \begin{array}{l} u^i, v^i \in A_i \quad (i = 1, 2), \\ u^i < v^i \quad (i = 1, 2) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

このとき、

$$\begin{aligned} f(\text{Cell})(A_1, A_2) &= \left\{ (f(u^1), f(v^1)) \times (f(u^2), f(v^2)) \mid \begin{array}{l} u^i, v^i \in A_i \quad (i = 1, 2), \\ u^i < v^i \quad (i = 1, 2) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

は **Physical Space** におけるセルの全体となる。

以上に定義した座標曲線によって、 $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A_i \subseteq I_i$  ( $i = 1, 2$ ) とするとき、集合としての定義が与えられていなかった **Physical Space** および **Virtual Space** が式(19)および式(21)のように表せる：

$$\begin{aligned} (\text{Virtual Space}) &= \{I_1 \cap I_2 \mid I_i \in \mathcal{C}_i(f; A_1, A_2) \quad (i = 1, 2)\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\text{Physical Space}) &= \{f(x) \mid x \in (\text{Virtual Space})\} \end{aligned} \quad (20)$$

すなわち、**Virtual Space** は  $\text{dom}(f)$  に存在する直線  $I_1 \in \mathcal{C}_1(f; A_1, A_2)$  と直線  $I_2 \in \mathcal{C}_2(f; A_1, A_2)$  の交点の全体で、**Physical Space** は座標曲線の交点の全体に等しい。なお、特に  $f$  が一対一の対応の場合、**Physical Space** について

$$\begin{aligned} (\text{Physical Space}) &= \{f(I_1) \cap f(I_2) \mid I_i \in \mathcal{C}_i(f; A_1, A_2) \quad (i = 1, 2)\} \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立つ。

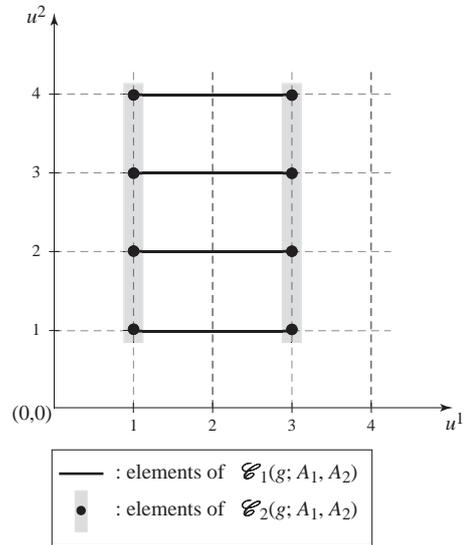


図2:  $\mathcal{C}(g; A_1, A_2)$  の各要素

## 2.4 同相の概念と特異点

座標変換  $f: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ ) と任意の  $A_i \subseteq I_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して次の条件が成り立つとき、 $f$  は同相写像としての性質を持つ：

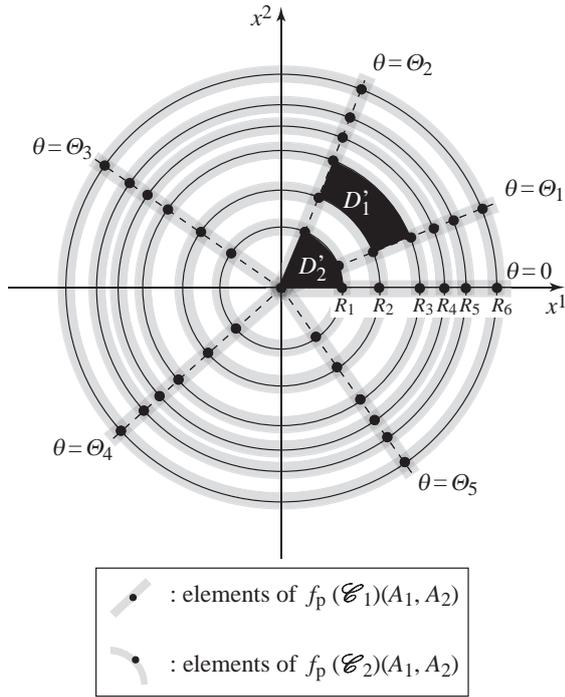


図 3:  $f_p(\mathcal{C})(A_1, A_2)$  の各要素

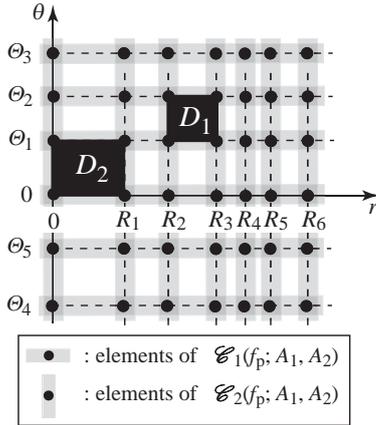


図 4:  $\mathcal{C}(f_p; A_1, A_2)$  の各要素

1.  $\text{Cell}(A_1, A_2)$  と  $f(\text{Cell})(A_1, A_2)$  の要素数が等しい.
2.  $A_1 \times A_2$  における任意の Virtual Space のセル  $D$  と頂点を共有した Virtual Space のセルの全体  $\mathcal{U}(D)$  に対し,  $f(\mathcal{U}(D))$  もまた Physical Space のセル  $f(D)$  と頂点を共有する Physical Space のセルの全体となる.

このとき, 条件の (1) は  $f$  が全単射であること, (2) は  $f$  が連続であり位相構造が保存されることに相当する条件である. また, 条件 (1) および (2) を満足するような写像が構成できるとき, Virtual Space  $A_1 \times A_2$  と Physical Space  $f(A_1 \times A_2)$  は同相であるとする. さらに, Physical Space 上のある点  $a$  に対し,

$$f^{-1}(a) = \{ x \in A_1 \times A_2 \mid f(x) = a \} \quad (22)$$

なる集合の要素が Virtual Space 上の 2 つ以上の点となる場合,  $a$  を広義の特異点とする. 狭義の特異点は通常の意味での特異点とし, 座標曲線が Physical Space の点  $b$  に縮退している場合, 点  $b$  を狭義の特異点とよぶ. 狭義の特異点は広義の特異点に含まれ, 特に狭義の特異点では計量テンソルの行列式  $g$  が 0 となる. なお, 広義の特異点は写像の制限によって解析領域から除去できる. 例として  $f_p$  の場合, 三角関数の周期性によって Physical Space のあらゆる点は広義の特異点となり, 特に  $(x^1, x^2) = (0, 0)$  は狭義の特異点である. ここで,  $f_p$  の定義域を 1 周期分に制限し,  $r = 0$  の直線を除いて得られる写像

$$f_p|_A = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y = f_p(x) \} =: F_p, \quad (23)$$

$$A = \{ (r, \theta) \mid r \in \mathbb{R}_+ - \{0\} \wedge \theta \in [0, 2\pi) \} \quad (24)$$

は Physical Space 上に広義の特異点を持たない.

直観的に, Virtual Space の圧縮, 引き伸ばしのみによって Physical Space を構成できない場合,  $f$  は同相写像でない. さらに, Physical Space に広義の特異点が存在するか, 同じことであるが Physical Space に 3 本以上の座標曲線の交点が存在する場合,  $f$  は同相写像でない. なお, 上述の例によって  $f_p$  を  $F_p$  に制限することで広義の特異点を除けることを示したが,  $F_p$  も同相写像でない. なぜならば, Virtual Space の長方形を  $F_p$  によって Physical Space 上の円にうつす際, 長方形の端を接合する必要があるからである. このような変形はセルの近傍を保存しないため,  $F_p$  は同相写像でない.

## 2.5 物理的意味における特異点の問題

2.4 節で述べたように, 広義の特異点には複数の Virtual Space の点に対応する. 曲線座標を用いた FDTD 解析では Virtual Space で計算された電磁界を Physical Space にうつすので, 広義の特異点では複数の物理状態 (e.g. 電磁界の強度) が存在することとなる. このような計算結果は物理的に妥当でない. さらに数値計算ではタイムステップが有限であるから, セルサイズが 0 となる狭義の特異点では計算上, 物理現象の伝播速度が無限大となる. したがって CFL 条件により, 狭義の特異点は解析領域に含められない. 一方で  $f_p$  の例でみたように, 写像の定義域を制限することによって広義の特異点は Physical Space から除去できる. しかしこの制限は, モデルの形状に対する制限に等しい. そしてこのような問題は,  $f$  が同相写像でない写像であることで生ずる. したがって同相写像による解析では, Physical Space の中に設定す

る構造物(モデル)の形状が制限されず、幾何学的に自由度の高い解析ができる。

### 3 同相写像の決定

#### 3.1 座標変換を得る一手法

2.4 節に述べた、同相写像に関する2つの条件が満たされるような座標変換を簡単に構成する方法の1つは、それらの条件が満たされるような  $f(\mathcal{C})(A_1, A_2)$  をはじめに与え、それを実現するような  $f$  を後付けで求めることである。この方法は、座標曲線の形状がよくわかっている座標変換一般に用いることができる。

簡単な例として、結果として得られる座標変換は同相写像とならないが、図5のような座標曲線を考える。

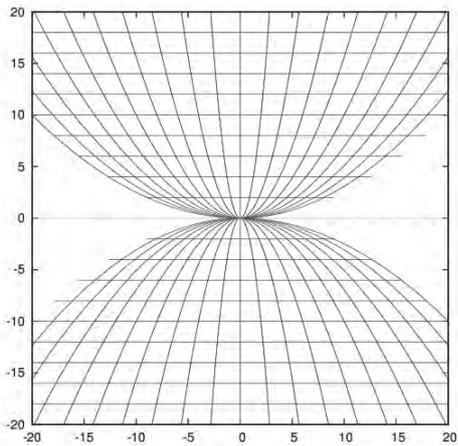


図5:  $f(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の各要素が放物線および直線の場合

図5に示された曲線族は、 $f(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の各要素を有限個に間引いて描かれたものである。図5に示したような  $f(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の各要素を、

$$a \in f(\mathcal{C})_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \iff (\exists u^2 \in \mathbb{R}) [a = \{ (x^1, x^2) \mid x^2 = u^2 \wedge x^1 \in \mathbb{R} \}], \quad (25)$$

$$b \in f(\mathcal{C})_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \iff (\exists u^1 \in \mathbb{R}) \left[ b = \left\{ (x^1, x^2) \mid x^2 = \left( \frac{x^1}{u^1} \right)^2 \wedge x^2 \in \mathbb{R} \right\} \right] \quad (26)$$

によって表すとす。式(25)は  $u^1$  方向の座標曲線が直線となることを示しており、式(26)は、 $u^2$  方向の座標曲線が放物線で、その鋭さがパラメータ  $u^1$  の増加とともに小さくなることを示している。このとき、Physical Space の任意の点  $(x^1, x^2)$  は  $u^1$  方向の座標曲線と  $u^2$  方向の座標曲線の交点であるから、 $(x^1, x^2)$  は次の連立方程式の解である：

$$\begin{aligned} x^2 &= u^2 \\ x^2 &= \left( \frac{x^1}{u^1} \right)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)を解けば  $(x^1, x^2)$  と  $(u^1, u^2)$  の関係が得られ、そのような関係は座標変換式に他ならない。式(27)の解は、

$$x^1 = \pm \sqrt{u^2} \cdot u^1, \quad x^2 = u^2 \quad (28)$$

となり、式(28)で  $x^1$  に関する式の符号を+に選んだとき、座標変換  $f$  は次のように得られる：

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (u^1, u^2) \mapsto (\sqrt{u^2} \cdot u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (29)$$

ただし、 $u^2 < 0$  では  $\sqrt{u^2}$  は複素数となり、座標曲線は図5のようにならない。 $f$  が目的の座標曲線を持つようにするには、

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (u^1, u^2) \mapsto (\sqrt{|u^2|} \cdot u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (30)$$

とすればよい。なお、ここで求めた座標変換について、計量テンソルは

$$[g_{i,k}] = \begin{pmatrix} |u^2| & \sqrt{|u^2|} \\ \sqrt{|u^2|} & |u^2|' \sqrt{|u^2|} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$g(u^1, u^2) = \det[g_{i,k}] = |u^2| (|u^2|' \sqrt{|u^2|} - 1) \quad (32)$$

となるが、 $g(0,0) = 0$  であるから点  $f((0,0)) = (0,0)$  は狭義の特異点である。

#### 3.2 円柱の解析に用いる写像

3.1 節で述べた方法を用い、正方形を円にうつすような同相写像  $F_h$  を  $F_h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  として構成する方法を示す。 $F_h(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の要素の形状は、図6のような変形を考えることにより得られる。

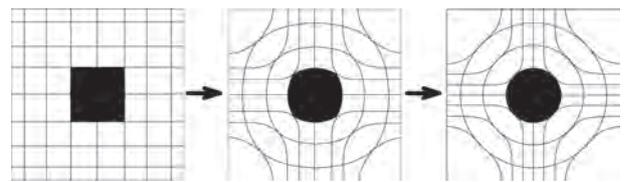


図6: 角柱の変形による円柱のモデリング

図6における変形前の領域は Virtual Space であり、Virtual Space において黒く示された角柱とともに示されているグリッドは直線族  $\mathcal{C}(F_h; \mathbb{R}, \mathbb{R})$  の要素である。また、図6における変形後の領域は Physical Space で、Physical Space が描かれた変形後のグリッドは  $F_h(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の要素となるべき曲線族である。以降では、Physical Space  $F_h(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  の一点を、パラメータ  $\alpha^1, \alpha^2$  によって  $(x^1(\alpha^1, \alpha^2), x^2(\alpha^1, \alpha^2))$  と表すこととする。図6に示したような長方形から円への変形の仕方は一意でなく、変形する範囲は構造物の近傍だけでもよい。本論文では、空間を一様に変形するような写像として  $F_h$  を定式化する。

図6のような変形を考えることで  $F_h$  における座標曲線の概形が決定された。そこで、座標曲線は次なる2つの性質を持つ：(1) 座標曲線の一部が円弧をなし、円弧は直線へ滑らかに接続される；(2) **Virtual Space** 原点を中心とした正方形は、**Physical Space** の原点を中心とした円にうつされる。このような2条件を満足する曲線の例として、図7および図8に示すような曲線が考えられる。

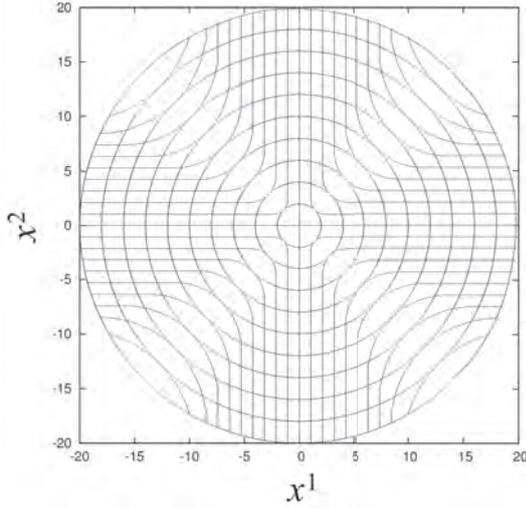


図7:  $F_h$  の座標曲線の候補 (1)

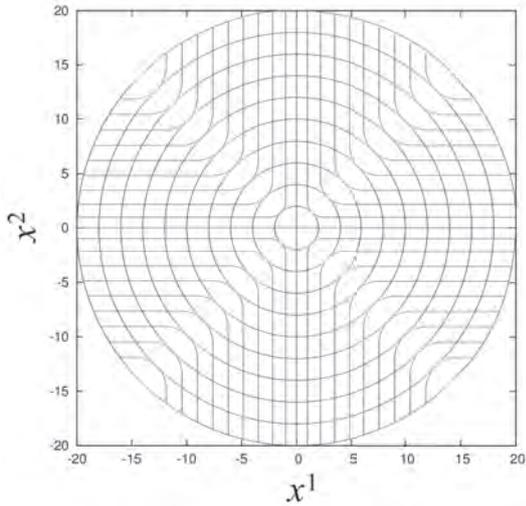


図8:  $F_h$  の座標曲線の候補 (2)

図7と図8の違いは  $x^2 = \pm x^1$  をみたく点を含んだセルの大きさ(セルサイズ)であり、図7では  $x^2 = \pm x^1$  を含むセルの大きさが  $|x^i|$  に比例して増大し、図8では  $|x^i|$  の増大に対して次第に飽和することである。このような2つの曲線族の例を示したが、数値計算上の問題として図8の曲線族はセルサイズのばらつきが図7の曲線族の

場合より少なく、数値的な反射がより少ないことが予想されるため、 $F_h(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の要素は図8に示されたような特徴を持つ曲線族として与える。

図8に示したような座標曲線はいずれも、次のような特徴を持つ3つの曲線を接続して構成される：

1. 原点中心、半径  $\alpha^i$  の円  $P_1(\alpha^i)$
2.  $x^k$  軸に平行な直線  $P_2(\alpha^i)$
3.  $|x^i| = |\alpha^i|$  をみたく点で円  $P_1(\alpha^i)$  に接し、適当な点で直線  $P_2(\alpha^i)$  に接するような円  $P_3(\alpha^i)$

$P_3(\alpha^i)$  は、円弧と直線を滑らかに接続するための曲線であり、有限の区間内で傾きが1および0となる点が存在することが求められる。2次曲線、正弦曲線および円などはこの条件をみたし、以下で示す  $F_h$  の定式化において  $P_3(\alpha^i)$  は円とした。**Physical Space** のすべての点は、これをなす曲線の対によって4種類に類別でき、**Physical Space** の第1象限における座標曲線の詳細な設計を交点の種類ごとに図9に示す。図9において、 $B(\alpha^i)$  は円  $P_3(\alpha^i)$  の半径、 $(X(\alpha^i), X(\alpha^i))$  は円  $P_3(\alpha^i)$  の中心の座標であり、 $(A(\alpha^i), 0)$  あるいは  $(0, A(\alpha^i))$  は直線  $P_2(\alpha^i)$  と  $x^k$  軸との交点である。 $B(\alpha^i)$ 、 $X(\alpha^i)$  および  $A(\alpha^i)$  は、求める座標曲線の形状によって、それぞれ式(33)、式(34)および式(35)のように決められる：

$$B(\alpha^i) = a \cdot \left(1 - e^{-\left|\frac{\alpha^i}{a}\right|}\right) \quad (33)$$

$$X(\alpha^i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha^i| + B(\alpha^i)) \quad (34)$$

$$A(\alpha^i) = X(\alpha^i) - B(\alpha^i) \quad (35)$$

$a$  は正の定数であり、 $X$ 、 $B$  および  $A$  はすべての  $\alpha^i \in \mathbb{R}$  において正である。特に、

$$\alpha^i = 0 \implies B(\alpha^i) = X(\alpha^i) = A(\alpha^i) = 0 \quad (36)$$

である。さらに、 $F_h$  を同相写像とするには、円  $P_3(\alpha^i)$  が  $x^1$  軸、 $x^2$  軸と交差しないように  $B(\alpha^i)$  を定めなければならない。 $X$ 、 $B$  および  $A$  を用いて、曲線の各構成部位が式(37)から式(39)のように表せる：

$$P_1(\alpha^i) = \{ (x^1, x^2) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = (\alpha^i)^2 \} \quad (37)$$

$$P_2(\alpha^i) = \{ (x^1, x^2) \mid x^k = S(\alpha^i)A(\alpha^i) \} \quad (38)$$

$$P_3(\alpha^i) = \{ (x^1, x^2) \mid (x^1 - X(\alpha^i))^2 + (x^2 - X(\alpha^i))^2 = B(\alpha^i)^2 \} \quad (39)$$

ただし、

$$S(\alpha^i) = \begin{cases} 1, & (\alpha^i > 0) \\ -1, & (\alpha^i < 0) \\ 0, & (\alpha^i = 0) \end{cases} \quad (40)$$

である。 $P_\mu(\alpha^i) \cap P_\nu(\alpha^k)$  の形の集合の要素は座標曲線の交点を与え、図9に示されているように、すべての座標曲線の交点は次なる4つの集合のいずれかに属する：

$$D'_1 := P_1(\alpha^2) \cap P_2(\alpha^1) = \left\{ (x^1, x^2) \left| \begin{array}{l} x^1 = S(\alpha^1) \cdot A(\alpha^1), \\ x^2 = S(\alpha^2) \cdot \sqrt{(\alpha^2)^2 - A(\alpha^1)^2} \end{array} \right. \right\} \quad (41)$$

$$D'_2 := P_1(\alpha^2) \cap P_3(\alpha^1) = \left\{ (x^1, x^2) \left| \begin{array}{l} x^1 = S(\alpha^1) \cdot \sqrt{(\alpha^2)^2 - U(\alpha^1; \alpha^2)^2}, \\ x^2 = S(\alpha^2) \cdot U(\alpha^1; \alpha^2) \end{array} \right. \right\} \quad (42)$$

$$D'_3 := P_3(\alpha^2) \cap P_1(\alpha^1) = \left\{ (x^1, x^2) \left| \begin{array}{l} x^1 = S(\alpha^1) \cdot U(\alpha^2; \alpha^1), \\ x^2 = S(\alpha^2) \cdot \sqrt{(\alpha^1)^2 - U(\alpha^2; \alpha^1)^2} \end{array} \right. \right\} \quad (43)$$

$$D'_4 := P_2(\alpha^2) \cap P_1(\alpha^1) = \left\{ (x^1, x^2) \left| \begin{array}{l} x^1 = S(\alpha^1) \cdot \sqrt{(\alpha^1)^2 - (A(\alpha^2))^2}, \\ x^2 = S(\alpha^2) \cdot A(\alpha^2) \end{array} \right. \right\} \quad (44)$$

ただし,

$$U(\alpha^i, \alpha^k) = \frac{1}{2} \bar{U}(\alpha^i) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(\alpha^k)^2 - \bar{U}(\alpha^i; \alpha^k)^2}, \quad (45)$$

$$\bar{U}(\alpha^i; \alpha^k) = \frac{1}{2X(\alpha^i)} \cdot \left( (\alpha^k)^2 + 2X(\alpha^i)^2 - B(\alpha^i)^2 \right) \quad (46)$$

である．特に,

$$|\alpha^1| = |\alpha^2| \implies U(\alpha^i; \alpha^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha^k| \quad (47)$$

なる性質がある．式 (41) から式 (44) に示した集合を定義する方程式の各組は, それぞれ座標変換式であり, これを  $i = 1, 2, 3, 4$  に対して  $F_i(\alpha^1, \alpha^2)$  と表す．このとき,  $i = 1, 2, 3, 4$  に対して  $F_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow D'_i$  で,  $F_i(\mathbb{R}^2) = D'_i$  である．最終的に  $F_h$  は, 各  $F_i$  の定義域を以下の式 (48) から式 (51) に示す領域に制限して得られる座標変換  $F_i|_{D_i}$  によって, 式 (52) のように決定される:

$$D_1 = \{ (\alpha^1, \alpha^2) \mid 0 \leq (\alpha^1)^2 < X^2(\alpha^1) + A^2(\alpha^1) \} \quad (48)$$

$$D_2 = \{ (\alpha^1, \alpha^2) \mid X^2(\alpha^1) + A^2(\alpha^1) \leq (\alpha^1)^2 < (\alpha^2)^2 \}, \quad (49)$$

$$D_3 = \{ (\alpha^1, \alpha^2) \mid X^2(\alpha^2) + A^2(\alpha^2) \leq (\alpha^2)^2 \leq (\alpha^1)^2 \}, \quad (50)$$

$$D_4 = \{ (\alpha^1, \alpha^2) \mid 0 \leq (\alpha^2)^2 < X^2(\alpha^2) + A^2(\alpha^2) \}, \quad (51)$$

$$F_h = F_1|_{D_1} \cup F_2|_{D_2} \cup F_3|_{D_3} \cup F_4|_{D_4}. \quad (52)$$

このような制限は, **Physical Space** から広義の特異点を除き,  $F_h$  の値が 1 つに定まるよう構成するために必要である．以上で構成した  $F_h$  は, はじめに与えた  $F_h(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  を確かに描き, これより  $F_h$  は同相写像としての性質をもつ．

## 4 解析条件

### 4.1 解析に用いる写像

本解析は, 原点中心, 半径  $R$  および材質は完全導体 (PEC) なる条件の無限長円柱を含んだ **Physical Space** の 1 点を励振して生じる電磁界の伝播に対する FDTD 解析である．FDTD 解析には,  $F_r, F_p, F_h$  なる 3 つの写像を用いた． $F_r$  は rectilinear 座標  $\xi^1, \xi^2$  への座標変換であり,  $F_r(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  に含まれる曲線がすべて直線となるような写像である．解析では簡単に,  $F_r$  は恒等写像, すなわち

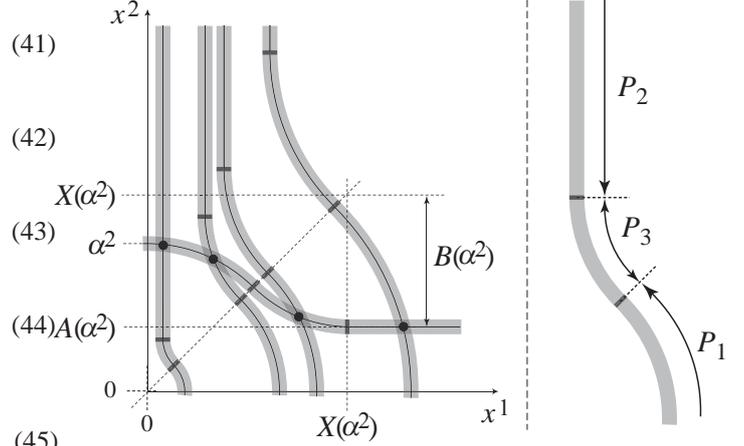


図 9:  $F_h(\mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の要素の構成

$$F_r = \{ (x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} \quad (53)$$

とした．なお,  $F_r(\mathcal{C})_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の任意の要素は  $F_r(\mathcal{C})_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  のすべての要素と直交する．

各写像による解析結果は, ある時刻における電磁界分布, ある観測点における時間波形によって各写像による解析ごとに比較される．本論文の目標から,  $F_r$  および  $F_p$  を用いた解析は,  $F_h$  を用いた解析に対する比較対象である． $F_r$  による解析は, 座標変換を用いない通常の FDTD 解析であり, モデリングに階段近似を含む解析例として比較対象に採用する．また,  $F_p$  は  $F_h$  と同じく円に沿うような座標曲線を持ち,  $F_h$  よりシンプルな方程式で表されることから,  $F_p$  を用いた解析を  $F_h$  を用いた解析に対する評価基準として比較対象に採用する．

### 4.2 解析領域の設定

**Physical Space** の幾何学的・電磁気学的な条件は, 各写像による解析ごとに等しく設定する必要がある．各写像による解析のために設定した **Virtual Space**  $D_*$  に対応する **Physical Space**  $F_*(D_*)$  について,  $F_r(D_r) = F_p(D_p) = F_h(D_h) =: D$  であるとき,  $D$  を以降では解析領域とよぶ．本解析で設定する解析領域の構成を, 図 10 に示す．

解析領域の円柱を除いた領域は真空である．境界条件は PEC であるが, 写像によって解析領域の境界の形状が異なることを考慮し, 解析時間  $t_{\max}$  は境界からの反射波が観測点に到達しないように設定する必要がある． $t_{\max}$  は,

$$t_{\max} = \frac{1}{c} \cdot (\max_r - S) \cdot 1.5 \quad [\text{sec}] \quad (54)$$

とした．式 (54) において  $c$  は真空の光速であり, 1.5 は反射波が観測点に到達しないように定めた値である．

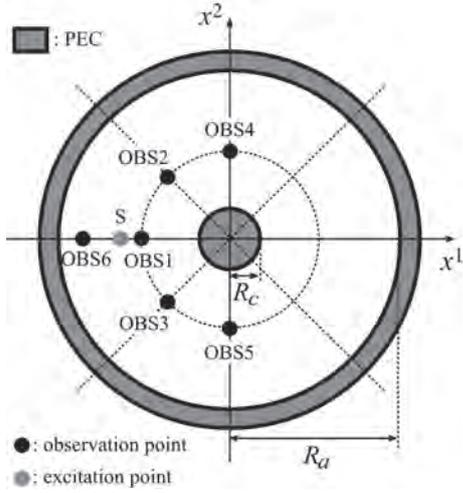


図 10: 各解析に共通に設定する Physical Space の構成

図 10 における点 OB\*および点 S の Physical Space における位置と,  $\max_r$  および  $R_c, R_a$  は, それぞれ

$$\begin{aligned}
 S &= (-6, 0), \\
 \text{OB1} &= (-5, 0), & \text{OB6} &= (-8, 0), \\
 \text{OB2} &= \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right), & \text{OB3} &= \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right), \\
 \text{OB4} &= (0, 5), & \text{OB5} &= (0, -5), \\
 R_c &= 4, & R_a &= 20.
 \end{aligned} \tag{55}$$

とした.

Virtual Space の設定に関する量として,  $\max_{u^i}, \min_{u^i}, N_{u^i}$  および  $\Delta_{u^i}$  を導入する.  $\max_{u^i}$  および  $\min_{u^i}$  は Virtual Space の  $u^i$  方向の下限および上限,  $N_{u^i}$  は Virtual Space の  $u^i$  方向の分割数, そして  $\Delta_{u^i}$  は Virtual Space の  $u^i$  方向のセルサイズであり, 各写像による解析ごとに次のように設定した:

$$\begin{cases} \min_{\xi_1} = \min_{\xi_2} = -R_a, \\ \max_{\xi_1} = \max_{\xi_2} = R_a, \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} \min_r = R_c, & \min_\theta = 0, \\ \max_r = R_a, & \max_\theta = 2\pi, \end{cases} \tag{57}$$

$$\begin{cases} \min_{\alpha^1} = \min_{\alpha^2} = -R_a, \\ \max_{\alpha^1} = \max_{\alpha^2} = R_a, \end{cases} \tag{58}$$

$$N_{\xi_1} = N_{\xi_2} = N_{\alpha^1} = N_{\alpha^2} = N_\theta = 201 =: N, \tag{59}$$

$$N_r = \frac{\max_r - R}{2\max_r} \cdot N = \frac{2}{5}N, \tag{60}$$

$$\Delta_{u^i} = \frac{\max_{u^i} - \min_{u^i}}{N_{u^i}} \quad i = 1, 2. \tag{61}$$

特にセル数は, 各解析ごとに  $x^i$  軸に沿ったセルの数が等しくなるように設定し, 観測点を円柱に対して対称に配置する都合上, 奇数とした.  $N_r$  の決定については,  $F_p$  による解析では円柱内にセルを設定する必要がないことを考慮した.

解析のために, Virtual Space は  $u^1$  方向に  $N_{u^1}$  個,  $u^2$  方向に  $N_{u^2}$  個に分割され, Virtual Space 全体は  $N_{u^1}N_{u^2}$  個の長方形のセルに分割される. ここで,  $i = 1, 2$  に対して  $I_{u^i}$  を

$$I_{u^i} = \{ k \cdot \Delta_{u^i} + \min_{u^i} \mid k = 0, 1, \dots, N_{u^i} \} \tag{62}$$

とすると,  $I_{u^1} \times I_{u^2}$  は Virtual Space に等しく,  $I_{u^1} \times I_{u^2}$  の各要素には計算された電磁界が配置される. このとき, 式 (62) の形から, 各  $I_{u^i}$  の各要素と, 自然数に 0 を加えた集合の間には一対一の対応をつけられ, Virtual Space のセルは 2 つの番号の組で表せる. すなわち, 次で定義する  $\tilde{I}_{u^1}$  と  $\tilde{I}_{u^2}$  の直積  $\tilde{I}_{u^1} \times \tilde{I}_{u^2}$  は, Virtual Space のセルの番号を軸に取った空間となる:

$$\tilde{I}_{u^i} = \{ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid k \cdot \Delta_{u^i} + \min_{u^i} \in I_{u^i} \}, \quad i = 1, 2. \tag{63}$$

計算機上では数値計算は  $\tilde{I}_{u^1} \times \tilde{I}_{u^2}$  なる空間で行われ,  $\tilde{I}_{u^1} \times \tilde{I}_{u^2}$  の各要素は格子点とよばれる. 各格子点に計算された電磁界が配置され, 電界は格子点を結んだ辺上, 磁界は 4 つの格子点を頂点に持つセルの中心における計算結果である. また,  $\tilde{I}_{u^i}$  の要素を, 立体ローマ字  $i_{u^i}$  で表す. なお,  $i_{u^i}$  と,  $u^i$  とは異なる添え字  $v^i$  を持つ諸量は混在して用いられることはないので, 単に  $\tilde{I}_{u^1}$  および  $\tilde{I}_{u^2}$  の要素を  $i$  および  $k$  と表す. 以降では, 常にこのような略記を用いる. さらに, 写像

$$\tilde{F}_* = \left\{ ((i, k), (i, k)) \left| \begin{array}{l} i \in \tilde{I}_{u^1} \wedge k \in \tilde{I}_{u^2}, \\ i = i \cdot \Delta_{u^1} + \min_{u^1}, \\ j = j \cdot \Delta_{u^2} + \min_{u^2} \end{array} \right. \right\} \tag{64}$$

は格子点を Virtual Space の点にうつす座標変換であり, 結局, 解析結果は  $F_* \circ \tilde{F}_*$  なる座標変換を受けて Physical Space につされる.

図 10 に示したような観測点および励振点に対応する Virtual Space の点は, 解析に用いる写像によって異なり,

$$\begin{cases} F_r^{-1}(S) = (-6, 0), \\ F_p^{-1}(S) = (6, \pi), \\ F_h^{-1}(S) = (-6, 0). \end{cases} \quad \begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB1}) = (-5, 0), \\ F_p^{-1}(\text{OB1}) = (5, \pi), \\ F_h^{-1}(\text{OB1}) = (-5, 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB2}) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right), \\ F_p^{-1}(\text{OB2}) = \left(5, \frac{3}{4}\pi\right), \\ F_h^{-1}(\text{OB2}) = (-5, 5). \end{cases} \quad \begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB4}) = (0, 5), \\ F_p^{-1}(\text{OB4}) = \left(5, \frac{1}{2}\pi\right), \\ F_h^{-1}(\text{OB4}) = (0, 5). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB3}) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right), \\ F_p^{-1}(\text{OB3}) = \left(5, \frac{5}{4}\pi\right), \\ F_h^{-1}(\text{OB3}) = (-5, -5). \end{cases} \quad \begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB5}) = (0, -5), \\ F_p^{-1}(\text{OB5}) = \left(5, \frac{3}{2}\pi\right), \\ F_h^{-1}(\text{OB5}) = (0, -5). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r^{-1}(\text{OB6}) = (-8, 0), \\ F_p^{-1}(\text{OB6}) = (8, \pi), \\ F_h^{-1}(\text{OB6}) = (-8, 0). \end{cases}$$

となる.

各写像による解析ごとに設定される Physical Space お

よび Virtual Space の概略を、図 11 から図 13 に、1 対の座標曲線と共に示す。

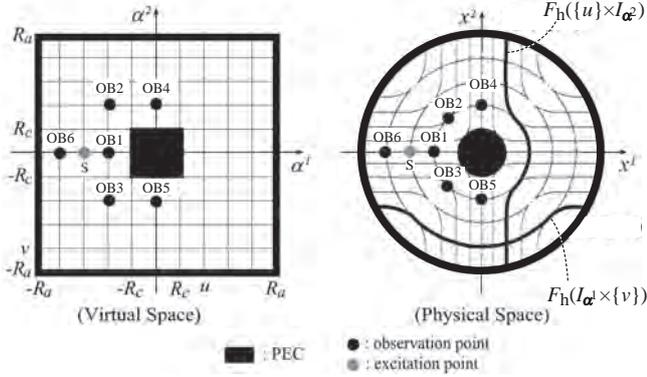


図 11:  $I_{\alpha^1} \times I_{\alpha^2}$  および  $F_h(I_{\alpha^1} \times I_{\alpha^2})$  の概略

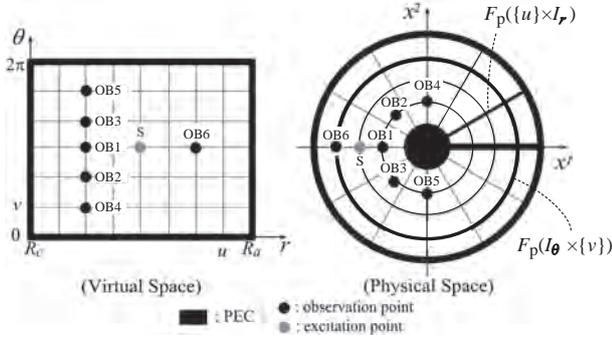


図 12:  $I_r \times I_\theta$  および  $F_p(I_r \times I_\theta)$  の概略

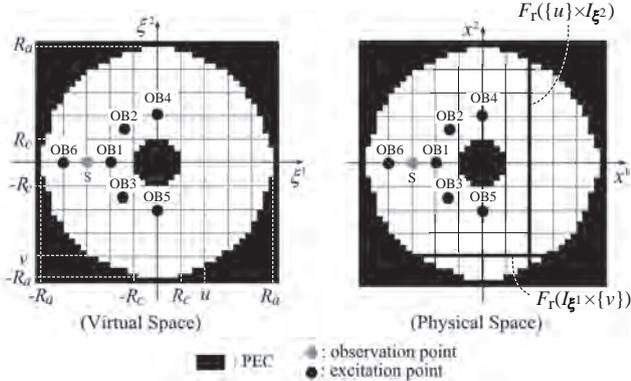


図 13:  $I_{\xi^1} \times I_{\xi^2}$  および  $F_r(I_{\xi^1} \times I_{\xi^2})$  の概略

図 13 について、 $F_r$  は恒等写像としていることから Physical Space と Virtual Space は同一である。また、Physical Space のセルがすべて正方形であるため、円柱のモデリングには階段近似が伴っている。 $F_p$  による解析については、境界条件を一様に PEC としているため、図 12 に示されているように  $\theta = 0$  の面が PEC となっている。このような現象は、 $F_p$  が同相写像でないことにより生ずる。 $\theta = 0$  の面は円柱をはさんで励振点の反対側であることから、 $\theta = 0$  の面にける電磁界の反射が解析結果に及ぼす影響は少ないと考え解析を行った。

本解析は 2 次元の解析であり、TE の条件で解析した。電磁界の反変成分に関する式 (3) および式 (4) において、真空の条件  $\sigma = \sigma^* = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  を適用した方程式を TE の条件で差分化し、その結果を式 (65) から式 (67) に示す：

$$E^1(i+\frac{1}{2}, k)^{n+1} = E^1(i+\frac{1}{2}, k)^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \sqrt{g(i+\frac{1}{2}, k)} \cdot \left\{ H_3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} - H_3(i+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \quad (65)$$

$$E^2(i, k+\frac{1}{2})^{n+1} = E^2(i, k+\frac{1}{2})^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \sqrt{g(i, k+\frac{1}{2})} \cdot \left\{ H_3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} - H_3(i-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \quad (66)$$

$$H^3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} = H^3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \sqrt{g(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \cdot \left\{ \left( \frac{E_2(i+1, k+\frac{1}{2})^n}{\sqrt{g^{22}(i+1, k+\frac{1}{2})}} - \frac{E_2(i, k+\frac{1}{2})^n}{\sqrt{g^{22}(i, k+\frac{1}{2})}} \right) - \left( \frac{E_1(i+\frac{1}{2}, k+1)^n}{\sqrt{g^{11}(i+\frac{1}{2}, k+1)}} - \frac{E_1(i+\frac{1}{2}, k)^n}{\sqrt{g^{11}(i+\frac{1}{2}, k)}} \right) \right\}. \quad (67)$$

ここで、上付きの  $n+1$  などは、かかる電磁界が時刻  $t = (n+1) \cdot \Delta t$  における量であることを示す。点  $(i, k)$  における電界の共変成分は、点  $(i, k)$  における電界の各反変成分から計算される。磁界の共変成分も同様に計算される。しかし電磁界の各方向成分は同一の格子点に配置されないため、点  $(i, k)$  上に配置されていない電磁界の成分は点  $(i, k)$  の近傍の格子点に配置されている電磁界の平均値で代用される [8]。電磁界の共変成分に関する式 (5) および式 (6) を TE の条件で差分化した結果を、式 (68) から式 (70) に示す：

$$E_1(i+\frac{1}{2}, k) = G_{11}(i+\frac{1}{2}, k)E^1(i+\frac{1}{2}, k) + G_{12}(i+\frac{1}{2}, k) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( E^2(i+1, k+\frac{1}{2}) + E^2(i+1, k-\frac{1}{2}) + E^2(i, k-\frac{1}{2}) + E^2(i, k+\frac{1}{2}) \right), \quad (68)$$

$$E_2(i, k+\frac{1}{2}) = G_{22}(i, k+\frac{1}{2})E^2(i, k+\frac{1}{2}) + G_{21}(i, k+\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( E^1(i+\frac{1}{2}, k+1) + E^1(i-\frac{1}{2}, k+1) + E^1(i-\frac{1}{2}, k) + E^1(i+\frac{1}{2}, k) \right), \quad (69)$$

$$H_3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H^3(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}). \quad (70)$$

なお、計量テンソル  $[g_{ik}]$  の各成分  $g_{ik}$  は、次のように差分化した：

$$\mathbf{e}_1(i, k) = \begin{pmatrix} x^1(i+\frac{1}{2}, k) - x^1(i-\frac{1}{2}, k) \\ x^2(i+\frac{1}{2}, k) - x^2(i-\frac{1}{2}, k) \end{pmatrix}, \quad (71)$$

$$\mathbf{e}_2(i, k) = \begin{pmatrix} x^1(i, k+\frac{1}{2}) - x^1(i, k-\frac{1}{2}) \\ x^2(i, k+\frac{1}{2}) - x^2(i, k-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$$g_{ik}(i, k) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \quad (i, k = 1, 2), \quad (73)$$

ただし、 $x^i(i, k)$  は  $F_* \circ \tilde{F}_*(i, k)$  の第  $i$  成分を示す。また、2 次元の解析であるから、

$$g_{33} = 1, \quad (74)$$

$$g_{31} = g_{32} = g_{13} = g_{23} = 0 \quad (75)$$

である。

タイムステップ  $\Delta_t$  は、曲線座標を用いた FDTD 法に対する CFL 条件 [8]

$$0 < \Delta_{t*} < \frac{1}{c} \cdot \min_{\substack{u^1 \in I_r, \\ u^2 \in J_s}} \left( \frac{\sqrt{g(u^1, u^2)}}{\sqrt{(g_{11} + g_{22} - 2g_{12})(u^1, u^2)}} \right) \quad (76)$$

により決定される。本解析では、式 (76) を満たすような  $\Delta_t$  を各写像ごとに等しく設定し、

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \min\{\Delta_{tr}, \Delta_{tp}, \Delta_{th}\} \\ &= 2.0 \times 10^{-11} \text{ sec} \end{aligned} \quad (77)$$

とした。

## 5 解析結果

$H^3(\tilde{F}_*^{-1}S) = \cos(0.5 \times 10^9 \Delta_t)$  として電磁界を励振して得られた  $H^3$  の空間分布の計算結果を、解析に用いた写像ごとに時刻  $t = t_{\max}$  について図 14 から図 16 に示す。また、 $F_h$ ,  $F_p$  および  $F_r$  を用いた各解析によって時刻  $t_{\max}$  までに得られた  $H^3$  の時間波形を、観測点ごとに図 17 から図 20 に示す。なお、OB2 と OB3, OB4 と OB5 の観測点の組は、それぞれ励振点と円柱の位置に関して幾何学的に対称な位置に配置されているため、これらの観測点の組で得られた時間波形は解析に用いる写像によらず一致した。

図 14 から図 16 の比較により、 $F_h$  および  $F_p$  による解析で得られた空間分布は互いに近似しており、これより  $F_h$  を用いて計算された電磁界は物理的に妥当な挙動を示しているといえる。ただし、 $F_r$  による解析で得られた空間分布には階段近似による波形の乱れが確認され、 $F_p$  による解析結果においては、 $r$  の増大に比例したセルサイズの増大に伴って計算された界分布の分解能の低下が見られる。

次に、 $F_p$  による解析結果を評価の基準とし、各観測点において得られた  $H^3$  の時間波形の特徴を  $F_r$  および  $F_h$  について述べる。以下で表記の煩雑さを避けるため、“ $F_*$  を用いて OB $m$  において得られた  $H^3$  の時間波形”なる表現を記号  $H^3[F_*]_m$  で表す。ここで、 $*$  は  $r, p, h$  のいずれかを表し、 $m$  は 1, 2, 4, 6 のいずれかを表す。時間波形の特徴は、 $H^3[F_r]_m$  および  $H^3[F_h]_m$  の  $H^3[F_p]_m$  に対する位相差  $\Delta T_{*,m}$  と振幅差  $\Delta H_{*,m}$  によって評価し、 $\Delta T_{*,m}$  は  $H^3[F_p]_m$  の零点と  $H^3[F_r]_m$  または  $H^3[F_h]_m$  の零点との時間差を  $H^3[F_p]_m$  の 1 周期で規格化した値、 $\Delta H_{*,m}$  は  $H^3[F_p]_m$  の 1 周期中における極値と  $H^3[F_r]_m$  または  $H^3[F_h]_m$  の 1

周期中における極値の差を  $H^3[F_p]_m$  の平均振幅で規格化した値である。なお、 $H^3[F_p]_m$  の 1 周期とは、 $H^3[F_p]_m$  の零点から次の零点までの時間間隔の平均である。さらに、ここで挙げた各平均値の算出に用いる値は、 $H^3[F_p]_m$  が十分定常的とみられる範囲の波形をもとに計算した。

OB1 における時間波形、すなわち  $H^3[F_r]_1$ ,  $H^3[F_h]_1$  および  $H^3[F_p]_1$  を示す図 17 より、各波形ごとに大きな位相差はみられず、 $\Delta T_{r,1} = -0.022$  に対し  $\Delta T_{h,1} = -0.016$  となった。一方で  $\Delta H_{r,1} = -0.25$ ,  $\Delta H_{h,1} = 0.042$  となり、OB1 においては  $H^3[F_r]_1$  に対し、 $H^3[F_h]_1$  が  $H^3[F_p]_1$  により近い結果となった。OB1 と同様に  $x^1$  軸上に位置する OB6 においては、 $\Delta T_{r,6} = -0.021$ ,  $\Delta T_{h,6} = -0.015$  および  $\Delta H_{r,6} = 0.061$ ,  $\Delta H_{h,6} = 0.050$  となり、各波形の特徴は OB1 における結果に近似した。ただし、 $\Delta H_{r,6}$  は  $\Delta H_{r,1}$  とは逆に正となっている。OB1 および OB6 における波形は、解析に用いた写像によらず概して一致しているが、これは S, OB1, OB6 および円柱の中心はすべて  $x^1$  軸上に位置することでこれらの点を含んだ系内で円柱による散乱は 1 次元的となり、円柱の形状が解析結果に及ぼす影響が小さかったためと考えられる。

OB2 では  $\Delta T_{r,2} = 0.086$  および  $\Delta T_{h,2} = 0.015$  となり、 $H^3[F_r]_2$  には図 18 から視認される程度の位相差が見られる。振幅差は  $\Delta H_{r,2} = 0.063$  および  $\Delta H_{h,2} = -0.092$  となった。OB2 における各波形の位相差および振幅差に関する特徴は、OB4 においてさらに顕著となり、 $\Delta T_{r,4} = 0.23$ ,  $\Delta H_{r,4} = 0.024$  および  $\Delta T_{h,4} = 0.044$ ,  $\Delta H_{h,4} = -0.11$  である。このような  $H^3[F_p]_2$  または  $H^3[F_p]_4$  に対する相違は、OB2 や OB4 では円柱の面で反射した電磁界が観測され、円柱の形状が解析結果に及ぼす影響が大きいためと考えられる。特に  $F_r$  による解析では、円柱の階段近似によって  $F_r$  における幾何学的条件は  $F_p$  における幾何学的条件と大きく異なり、これは  $\Delta T_{r,2}$  および  $\Delta T_{r,4}$  の増大に直接影響する。

以上に述べた各観測点における結果の特徴から、 $F_h$  を用いた解析結果の位相的特性は  $F_p$  に近似し、Physical Space の幾何学的条件は  $F_h$  と  $F_p$  を用いた場合でよく一致しているといえる。結果として、長方形を円形にうつすような写像として定式化した  $F_h$  を用いた解析は、 $F_p$  を用いた解析に近い結果を与えることが確認された。しかしながら、 $F_h$  による解析結果には、OB2 および OB4 で得られた時間波形において波形が負値から立ち上がっているという特徴がみられ、これは位相差や振幅差とは異なる特徴である。この現象は、 $|\alpha^1| = |\alpha^2|$  をみたすような Physical Space の点の近傍におけるセルのサイズが他の点のセルサイズに比べて増大しており、セルの形状も正方形から大きな変形を受けていることに起因する。すなわち、このような点の近傍では幾何学的条件が急峻

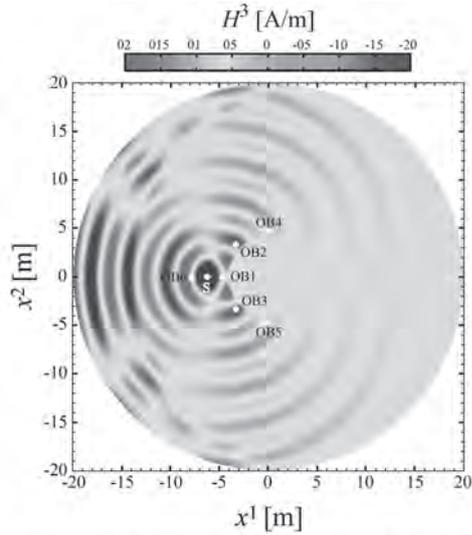


図 14:  $F_h$  による解析で得られた  $H^3$  の空間分布 ( $t = t_{\max}$ )

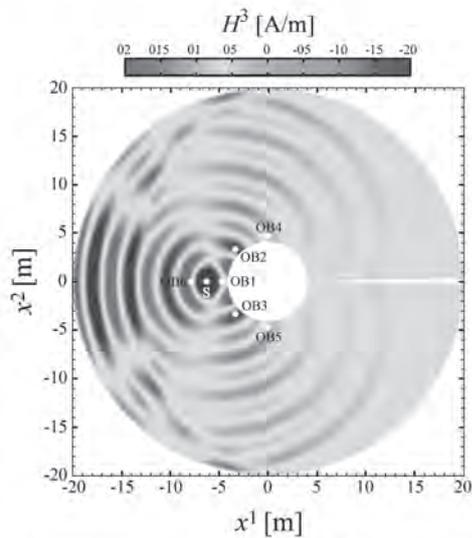


図 15:  $F_p$  による解析で得られた  $H^3$  の空間分布 ( $t = t_{\max}$ )

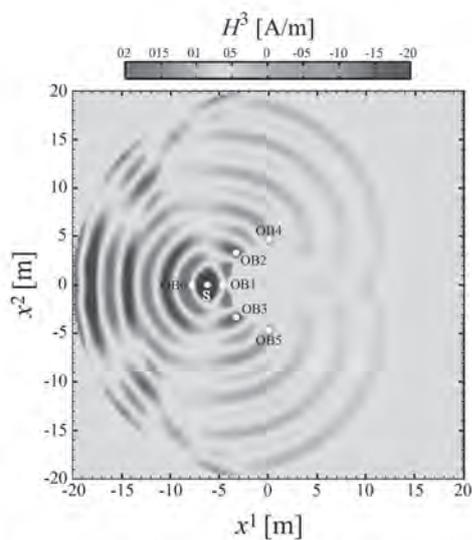


図 16:  $F_r$  による解析で得られた  $H^3$  の空間分布 ( $t = t_{\max}$ )

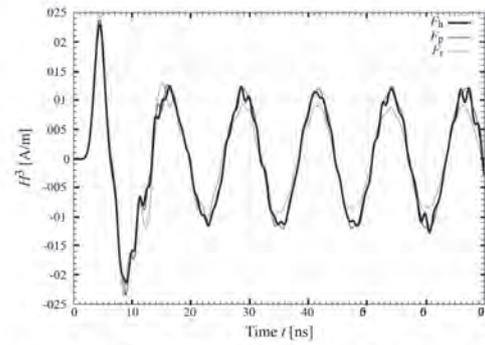


図 17: 点 OB1 における  $H^3$  の各解析ごとの時間波形

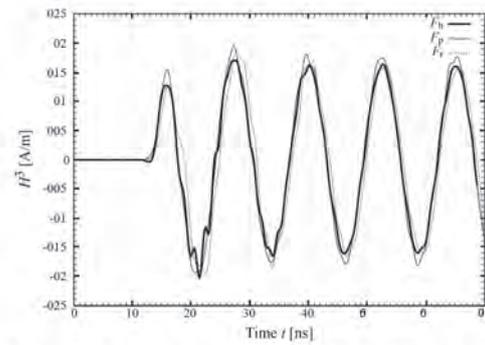


図 18: 点 OB2 における  $H^3$  の各解析ごとの時間波形

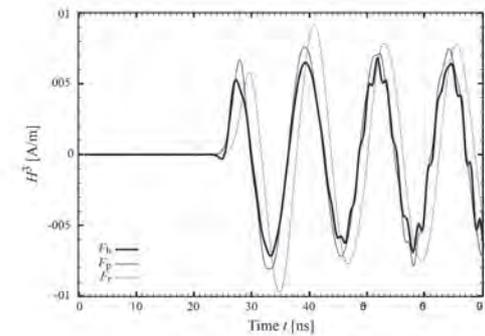


図 19: 点 OB4 における  $H^3$  の各解析ごとの時間波形

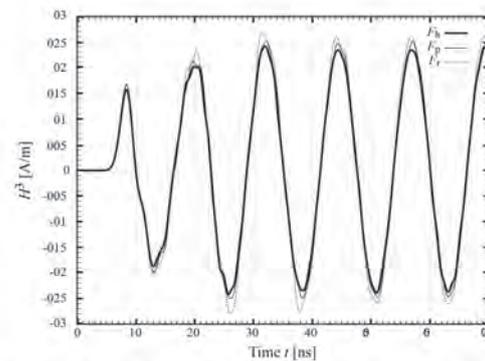


図 20: 点 OB6 における  $H^3$  の各解析ごとの時間波形

に変化しており，このような点で数値的な反射が生じていると考えられる．よって， $|\alpha^1| = |\alpha^2|$  をみたく領域を通過した電磁界には比較的大きな数値誤差が重畳され， $H^3[F_h]_2$  および  $H^3[F_h]_4$  が負値から立ち上がるという特異性の原因となる．実際，電磁波が  $|\alpha^1| = |\alpha^2|$  をみたく点を通過せずに到達する OB1 および OB6 において  $F_h$  を用いて得られた時間波形は，他の写像による解析結果と同じく正から立ち上がっている．また，幾何学的条件の急峻な変化は数値的な不安定をもたらし，より小さなタイムステップを要求する．したがって  $F_h$  による解析は相対的に不安定となり， $F_h$  による解析の不安定さは図 17 および図 19 に示した  $H^3[F_h]_1$  と  $H^3[F_h]_6$  において特に顕著である．ただし一般に，曲線座標を用いた FDTD 法は潜在的に不安定である [10] ことから，このような時間波形の乱れは，OB4 などで  $F_p$  による解析結果にも見られる．

## 6 結論

曲線座標による FDTD 解析は，連続変形を取り入れた電磁界解析の手法として有効である．しかし，曲線座標への座標変換は一般に同相写像でなく，これによるいくつかの解析上の困難があった (e.g. 特異点の存在およびこれによるモデルの形状に対する制限)．本論文では，座標変換として特に同相写像を用いる幾何学的自由度の高い解析法として Hom-FDTD 法を提案し，同相写像の定式化の方法と解析の実例を示した．解析例を示すために，提示した同相写像の定式化の方法を用いて正方形を円にうつす同相写像  $F_h$  を定式化した． $F_h$  による解析結果に対し，恒等写像  $F_r$  と極座標への座標変換である  $F_p$  を用い，完全導体の無限長円柱による散乱で生じた電磁界の空間的・時間的分布の解析結果を  $F_h$ ， $F_r$  および  $F_p$  ごとに同一条件下で比較した．これより，提案手法による解析結果は十分な妥当性を持ち，同相写像を用いることで，モデリングの容易な正方形モデルによって円形モデルを階段近似を含まずに解析できることが示された．本論文で確かめられた提案手法の特徴は，同相写像がモデルの形状の双対として用いられ，構造物の形状の数学的取り扱いがより明瞭となる可能性を示唆する．以上より提案手法は，我々の目標である SRR の形状と電磁気的性質との関係を明らかにすることのみならず，様々な無線および光学機器の設計・開発に大きな寄与をなすことが期待される．なお，今回は同相写像の定式化および定式化した同相写像による解析を 2 次元の場合について示したが，これらは 3 次元モデルの解析に対しても適用可能である．

一方で，本論文で定式化した写像  $F_h$  による解析では，セルの形状の変化が急峻となることで数値的に不安定となるような解析領域の点が存在することが明らかとなった．また，曲線座標を用いた FDTD 解析一般にみられる不安定さも確認された． $F_h$  による解析におけるこれらの問題は，unconditionally stable な ADI(Alternative Direction Implicit)-FDTD 法 [11] の採用が有効と考えられ，実際に曲線座標を用いる FDTD 法で ADI-FDTD 法を適用し，数値的に安定な解析が可能 [12] となることが示されている．このような手法を用い，Hom-FDTD 法による安定な解析を検討することは今後の課題となる．

## 参考文献

- [1] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Ribbins, and W. J. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol.47, pp.2075-2084, Nov. 1999.
- [2] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier. R. Shelby, S. C. Nemat-Nasser, N. Kroll, and S. Schultz, "Left-Handed Metamaterials," UCSA, Department of Physics, 2000.
- [3] V. G. Veselago, "Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic properties," Sov. Phys. USPEKHI, vol.10, pp.509-517, 1968.
- [4] I. Sassi, L. Talbi, K. Hettak, and A. Kabiri, "Magnetic Response of nth Rose Curve Resonator in the RF Frequency Regime", International Journal of Electrical and Computer Systems, vol.1, pp.18-25, 2012.
- [5] A. Mohammadi, H. Nadgaran and M. Agio, "Contour-path effective permittivities for the two-dimensional finite-difference time-domain method," Opt. Express. vol.13, pp.10367-10381, 2005.
- [6] T. I. Kosmanis and T. D. Tsiboukis, "A Systematic and Topologically Stable Conformal Finite-Difference Time-Domain Algorithm for Modeling Curved Dielectric Interfaces in Three Dimensions," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.51, no.3, pp.839-847, Mar. 2003.
- [7] T. G. Jurgens, A. Taflov, C. Umashankar, and T. G. Moore, "Finite-Difference Time-Domain Modeling of Curved Surfaces," IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol.40, no.4, pp.357-366, Apr. 1992.

- [8] Y. Hao and C. J. Railton, "Analyzing Electromagnetic Structures With Curved Boundaries on Cartesian FDTD Meshes," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol.46, pp.82-88, no.1, Jan. 1998.
- [9] R. Holland, "Finite difference solutions of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates," *IEEE Trans. Nuc. Sci.*, vol.NS-30, no.6, pp.4591-4689, Dec. 1983.
- [10] Y. Hao, V. Douvalis and C. G. Parini, "Reduction of late time instabilities of the finite-difference time-domain method in curvilinear coordinates," *IEE Proc, Sci. Meas. Technol.*, vol.149, pp.267-271, Sep. 2002.
- [11] T. Namiki, "A New FDTD Algorithm Based on Alternating Direction Implicit Method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol.47, no.10, pp.2003-2007, Oct. 1999.
- [12] W. Song, Y. Hao, and C. G. Parini, "ADI-FDTD algorithm in curvilinear coordinates," *Electron. Lett.*, vol.41, no.23, Nov. 2005.