

# LMIに基づいた $H_\infty$ コントローラによる極配置

– ロバストコントローラのマイクロプロセッサへの実装 –

## Pole Placement by Using $H_\infty$ Controller Based on LMI

– The Implementation of a Robust Controller on a Microprocessor –

青 木 立<sup>1)</sup> 井 上 稔<sup>2)</sup>

Tatsu Aoki<sup>1)</sup> Minoru Inoue<sup>2)</sup>

**Abstract:** Since the merit of an active suspension is theoretically clear, the method is indispensable to vehicles soon. However, it is necessary to solve various technological problems before active suspension are widely used. In the previous report, simulation results showed that it is necessary to develop the new implementation method of an active suspension controller on a short word-length microprocessor. There appear representation errors on coefficient of a robust control algorithm due to limited short word-length. As a result, the poles of the closed-loop system deviate from expected positions. Thus, in this paper the systematic derivation method for designing a robust controller is proposed. The transfer function of a plant or a controller can be converted to the generalized plant including the modeling errors. Also, the characteristic of the pole placement of the closed loop system using the robust controller is examined. Simulation results show that a pole moves in the opposite direction to the uncertainty of a plant so that a closed loop system become stable.

Keywords: Active suspension, Vehicle, Robust control, LMI, Digital controller, Microprocessor control

### 1. はじめに

車両の操作性と乗り心地はトレードオフの関係があり、広く普及しているパッシブサスペンションでは両方の条件を満足することはできない。この問題を解決するためにはアクティブサスペンションが有効であるが、制御系を構成するためにはセンサー、アクチュエータ、制御用マイクロプロセッサなどが必要になる。また、車両を制御するためにアクチュエータを常時作動させなければならず、消費エネルギーが大きい。このため、アクティブサスペンションはごく一部の高級車や電車の車両のみに応用され、一般的には、パッシブサスペンション、または、パッシブサスペンションにおけるダンパー係数をコンピュータ制御により自動的に変化させるセミアクティブサスペンションが用いられている。アクティブサスペンションの優位性は理論上明らかであり、今後の車両の高性能化や高機能化には必須の技術である。車両は、搭乗人数や積載荷重の変化、コーナリングにおける遠心力の影響、路面の凹凸、障害物など種々の外乱の影響を受ける。このような外乱の影響下でも車両の操作性及び乗り心地を維持するためには、ロバスト制御系が必要になる。T. P. J van der Sandeらは、アクティブサスペンションシステムを構成するコントローラを  $H_\infty$  ロバスト制御手法に基いて設計し、その有効性を検証した [1]。制御系の設計では、応答の立ち上がり時間や整定時間など複数の制御仕様が与えられる。これらの制御

仕様を複数の線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) により表現し、この LMI に基づいてロバストコントローラを設計する手法が 1990 年代に確立され、現在広く普及している [2]。LMI に基いた  $H_\infty$  ロバストコントローラを設計するためには、プラントを状態方程式に基いた一般化プラントで表現する必要がある。しかし、伝達関数により表現されたプラントからモデル化誤差を含む一般化プラントへのシステムティックな変換手法が十分に確立されていない。筆者らは、この LMI に基づいた  $H_\infty$  制御系設計手法に着目し、低コストであるが 8 ビットなど語長が短いマイクロプロセッサによるアクティブサスペンションの実現可能性について検討した [3]。その結果、ロバストコントローラをマイクロプロセッサへ実装するためには離散時間系でのコントローラ設計手法及びマイクロプロセッサの語長を考慮したコントローラの実装手法を考案する必要があることがわかった。

そこで、本研究では伝達関数で表現されたプラントをシステムティックに一般化プラントへ変換する手法を提案する。さらに、一般化プラントに基づいて求めたロバストコントローラを用いた閉ループ系の極配置の特徴を把握する。以下に本論文の構成を示す。第 2 節では LMI に基づいた  $H_\infty$  コントローラ設計手順の概要について述べる。第 3 節では任意の次数の制御対象に関して一般化プラントをシステムティックに導出する手法について述べる。1 次系を例にその手順を示すが高次系の拡張は容易である。第 4 節では求めたコントローラにより閉ループ制御系を構成し、外乱としてインパルスを与えたときの応答及び極配置の特徴について述べる。

1) 東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科 電気電子工学コース

2) 東京都立産業技術高等専門学校 創造工学専攻 電気電子工学コース 在学

## 2. LMI に基づいた $H_\infty$ コントローラの設計 [2]

### 2.1 制御系の構成

図 1 にロバスト制御系の構成を示す。プラント出力  $y$  とプラント入力  $u$  の間にコントローラを挿入し、フィードバック制御系を構成する。外乱  $w$  はプラントパラメータのノミナル値からの変動、すなわち、モデル化誤差、 $z$  はこの外乱  $w$  によるプラントの出力、すなわち、外乱抑制の評価指標である。 $H_\infty$  制御では、システムのノルムとして無限大ノルムを適用し、 $z$  の値が外乱  $w$  に対して小さくなるようにコントローラを設計する。ロバスト制御系では、プラントを一般化プラントと呼ばれる状態方程式により表現する。

- プラント

$$\dot{x}_p(t) = \mathbf{A}x_p(t) + \mathbf{B}_1w(t) + \mathbf{B}_2u(t) \quad (1)$$

$$z(t) = \mathbf{C}_1x_p(t) + \mathbf{D}_{11}w(t) + \mathbf{D}_{12}u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_2x_p(t) + \mathbf{D}_{21}w(t) + \mathbf{D}_{22}u(t) \quad (3)$$

ここで、プラント入力  $u(t)$  からプラント出力  $y(t)$  へ直接的な信号伝達はないもの、すなわち、 $D_{22} = 0$  と仮定する。この仮定はメカトロニクスの対象となるプラントについて一般的に成立する。

- コントローラ

コントローラを以下の状態方程式により表現する。

$$\dot{x}_k(t) = \mathbf{A}_kx_k(t) + \mathbf{B}_ky(t) \quad (4)$$

$$u(t) = \mathbf{C}_kx_k(t) + \mathbf{D}_ky(t) \quad (5)$$

ここで、図 1 に示す閉ループ系を考える。状態変数  $x_f$  を

$$x_f := [x_p^T \quad x_k^T]^T$$

とすると、入力が  $w$ 、出力が  $z$  である閉ループシステムの状態方程式は式 (1) から式 (5) より求まる。

$$\dot{x}_f(t) = \mathbf{A}_fx_f(t) + \mathbf{B}_fw(t) \quad (6)$$

$$z(t) = \mathbf{C}_fx_f(t) + \mathbf{D}_fw(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{A}_f$ 、 $\mathbf{B}_f$ 、 $\mathbf{C}_f$ 、 $\mathbf{D}_f$  は

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_k\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_k \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_k\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_k\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_k\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_k]$$

$$\mathbf{D}_f = [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_k\mathbf{D}_{21}]$$

とする。また、プラント出力  $y(t)$  は、式 (3) を考慮すると

$$y(t) = [\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{0}]x_f(t) + \mathbf{D}_{21}w(t) \quad (8)$$

により求まる。なお、式 (1) から式 (3) に示すプラントは以下の行列による表現も用いられる。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

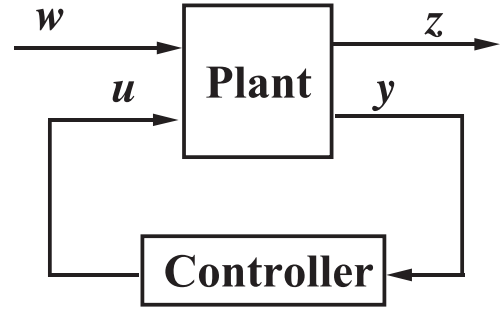


Fig. 1 Robust control system with an output feedback

Table 1 The robust controller design environment based on LMI

Development agency	Software name	version
MathWorks	MATLAB R2016a	9.0
MathWorks	Simulink	8.7
Linköping University	YALMIP	20150919
Lehigh University	SeDuMi	1.32

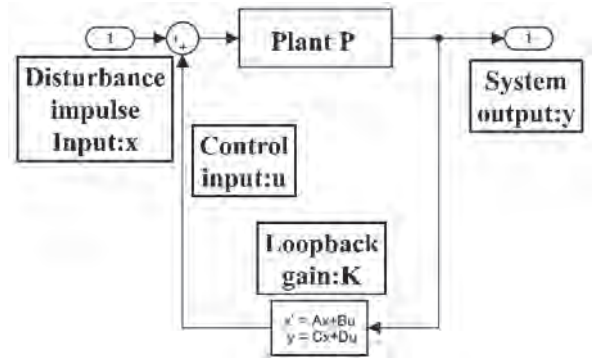


Fig. 2 A verification of the robust control system using Simulink

### 2.2 ロバストコントローラの設計手順

表 1 に本研究でコントローラを設計するために使用したソフトウェア及びライブラリを示す。MATLAB/Simulink に加えて Control Systems Toolbox なども必要である。さらに、MATLAB 上で LMI に関するプログラムが容易に作成可能な LMI パーサーである YALMIP 及び LMI に関する半正定値問題を解くためのフリーウェア SeDuMi[4-5] が必要になる。式 (1) から式 (3) により記述された一般化プラントについて、次節で述べる手法により  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}_1$ 、 $\mathbf{B}_2$ 、 $\mathbf{C}_1$ 、 $\mathbf{C}_2$ 、 $\mathbf{D}_{11}$ 、 $\mathbf{D}_{12}$ 、 $\mathbf{D}_{21}$  を求める、これらの行列に基いた LMI に関するプログラムは、YALMIP 及び SeDuMi を採用することにより MATLAB 上で簡単に記述、実行可能である。

### 2.3 ロバストコントローラの評価方法

本研究では、図 2 に示す Simulink 上で構成したフィードバック制御系により得られたコントローラを評価する。プラント  $\mathbf{P}$  には、予めノミナル値及びモデル化誤差  $\Delta$  を設定しておく。プラント入力  $u(t)$  に外乱としてインパルスを加え、そのときのプラント出力  $y(t)$  を評価する。

### 3. 一般化プラントの導出手順

図3に示す最も簡単な1次系を例に、プラントが与えられたときに式(1)から式(3)に示す一般化プラントの導出手順を示す。本手法は、一般化プラントを伝達関数として表現する手法を発展させた手法である [6].

$$G(s) = \frac{b}{s+a} \quad (10)$$

ここで、プラントのモデル化誤差を表現するため、 $\pm 1$ の範囲で変動する正規化された変動幅  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$  と重み係数を  $W_a$ ,  $W_b$  を導入する。式(11)と図4にプラントパラメータ  $a$  及び  $b$  のモデル化誤差を考慮した場合を示す。

$$G(s) = \frac{b(1+W_b\Delta_b)}{s+a(1+W_a\Delta_a)} \quad (11)$$

まず、一般化プラントを求めるため、図4を図5に示すように変形する。次に、図6に示すように  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$  ブロックを削除する。ここで、図6に示すように  $\Delta$  ブロックに関する入出力信号を、それぞれ、 $I_a(s)$ ,  $I_b(s)$ ,  $O_a(s)$ ,  $O_b(s)$  とし、状態変数  $x(s)$  を定義する。図6から以下の関係式が求まる。

$$X(s) = \frac{1}{s} (-aX(s) + U(s) - I_a(s)) \quad (12)$$

$$O_a(s) = W_a X(s) \quad (13)$$

$$O_b(s) = bW_b X(s) \quad (14)$$

$$Y(s) = bX(s) + I_b(s) \quad (15)$$

さらに、式(12)から式(15)を初期条件を0として逆ラプラス変換する。

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t) - i_a(t) \quad (16)$$

$$o_a(t) = W_a x(t) \quad (17)$$

$$o_b(t) = bW_b x(t) \quad (18)$$

$$y(t) = bx(t) + i_b(t) \quad (19)$$

ここで、

$$\mathbf{w}(t) := [i_a(t) \quad i_b(t)]^T$$

$$\mathbf{z}(t) := [o_a(t) \quad o_b(t)]^T$$

と定義すると、式(16)から式(19)と式(1)から式(3)を比較することにより、一般化プラントが求まる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1 &= [W_a \quad bW_b]^T \\ \mathbf{C}_2 &= [b] \\ \mathbf{D}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2次系以上のプラントに関して、図5に示すようにノミナル部分とモデル化誤差の部分についてフィードバックループを分離することにより、容易に求まる。

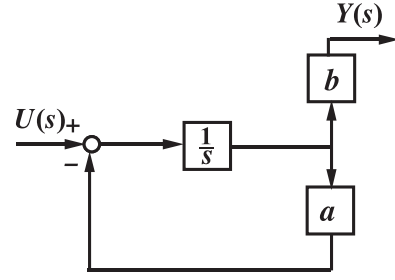


Fig. 3 Nominal plant

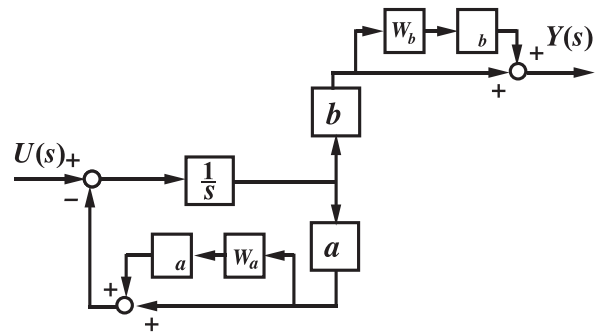


Fig. 4 Plant with modeling error

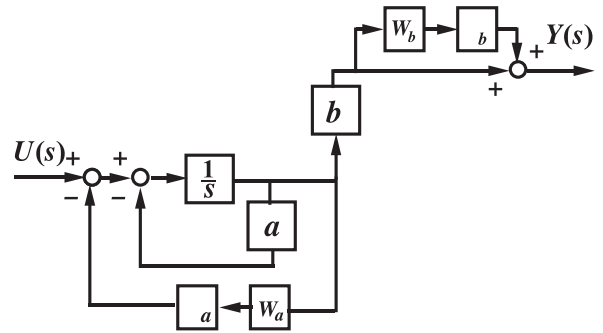


Fig. 5 A separation of a feedback path

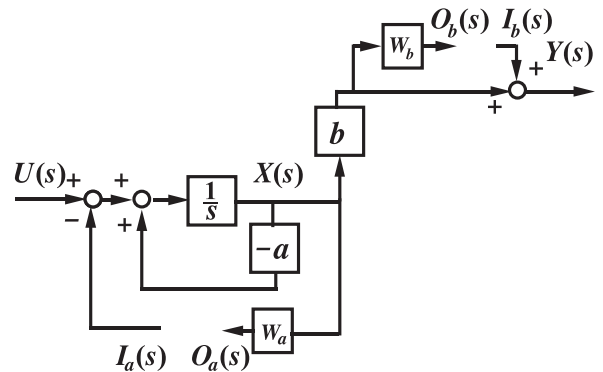


Fig. 6 An introduction of a disturbance and a state variable

**Table 2** Plant parameters

Plant	$a$	$W_a$	$\Delta_a$	$b$	$W_b$	$\Delta_b$
A	2	0.10	[-1,1]	28000	0.15	[-1,1]
B	200	0.10	[-1,1]	200	0.15	[-1,1]
C	-200	0.10	[-1,1]	200	0.15	[-1,1]
D	200	0.10	[-1,1]	-200	0.15	[-1,1]

**Table 3**  $H_\infty$  robust controller parameters

Plant	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$d_k$
A	-2.4e+6	-3.8e+3	2.1e+2	-3.3e-6
B	-3.3e+6	-5.1e+3	3.2	5.0e-5
C	-4.7e+9	-8.9e+2	7.8e+6	-1.54e-2
D	-3.3e+6	-5.1e+3	-3.2	-5.0e-5

**Table 4** Variation patterns of plant parameters

Pattern	$a$	$b$
Nominal	$a$	$b$
P1	$a(1 + W_a)$	$b$
P2	$a$	$b(1 + W_b)$
P3	$a(1 + W_a)$	$b(1 + W_b)$
M1	$a(1 - W_a)$	$b$
M2	$a$	$b(1 - W_b)$
M3	$a(1 - W_a)$	$b(1 - W_b)$
PM1	$a(1 - W_a)$	$b(1 + W_b)$
PM2	$a(1 + W_a)$	$b(1 - W_b)$

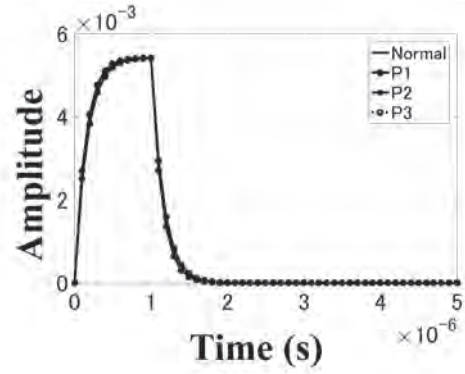
#### 4. シミュレーション結果

##### 4.1 ロバストコントローラの導出

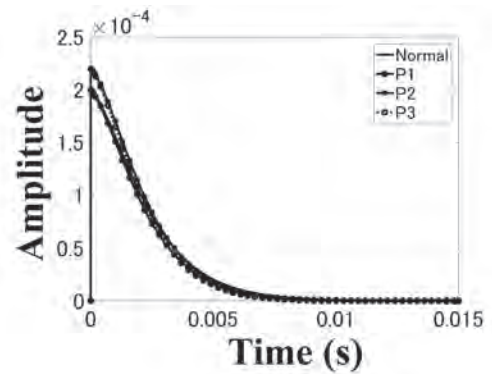
式 (10) に示す 1 次系ノミナルプラントについて、式 (11) に示すモデル化誤差を考える。表 2 に A, B, C, D の 4 種類のプラントのパラメータを示す。各プラントのパラメータを式 (20) により定義すると、LMI に基いた  $H_\infty$  ロバストコントローラが YALMIP, SeDuMi, MATLAB を用いて求まる。表 3 にこれら 4 種類のプラントに関するロバストコントローラパラメータを示す。なお、表 3 に示すパラメータは、コントローラを 8 ビットマイクロプロセッサに実装することを考慮して有効数字 2 桁で示している。

##### 4.2 制御系の外乱に対するロバスト性の検証

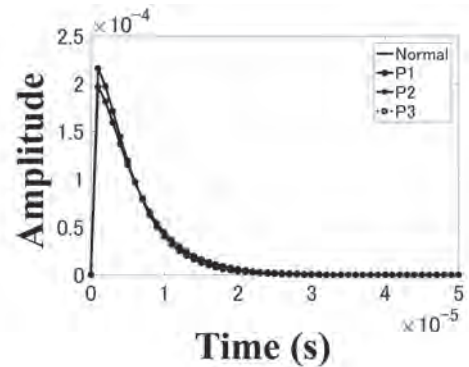
表 2 に示すプラントを表 3 に示すコントローラにより制御するため、図 2 に示す閉ループ系を構成する。モデル化誤差として表 4 に示す P1 から P3 の 3 種類の場合について考える。P1 は式 (11) の  $\Delta_a = 1$ ,  $\Delta_b = 0$  の場合、P2 は  $\Delta_a = 0$ ,  $\Delta_b = 1$  の場合、P3 は  $\Delta_a = 0$ ,  $\Delta_b = 1$  の場合である。プラント入力  $u(t)$  に外乱としてインパルスを入力したときの応答を図 7 から図 10 に示す。ノミナルプラントのパラメータ  $a$  及び  $b$  の大小に拘らず、プラント出力  $y$  は時間の経過とともに 0 に収束している。従って、LMI に基いた  $H_\infty$  設計手法によりプラントのモデル化誤差に対してロバストなコントローラが得られることがわかった。



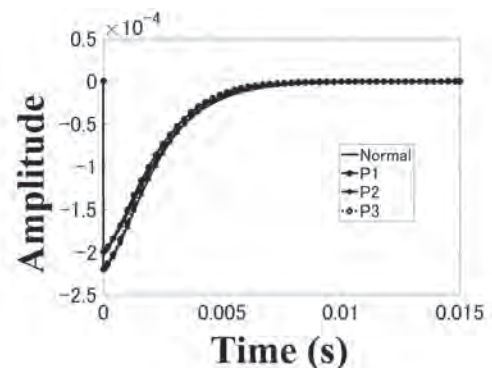
**Fig. 7** Impulse response of plant A



**Fig. 8** Impulse response of plant B



**Fig. 9** Impulse response of plant C



**Fig. 10** Impulse response of plant D

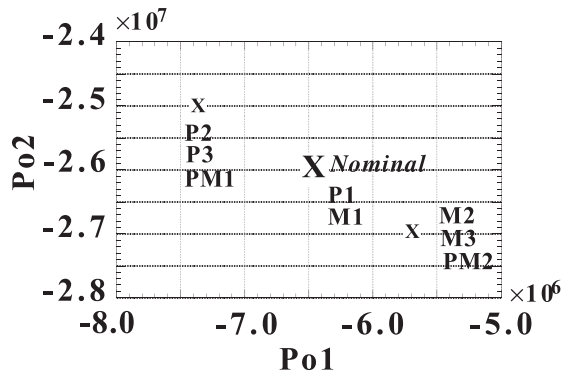


Fig. 11 Pole placement on plant A

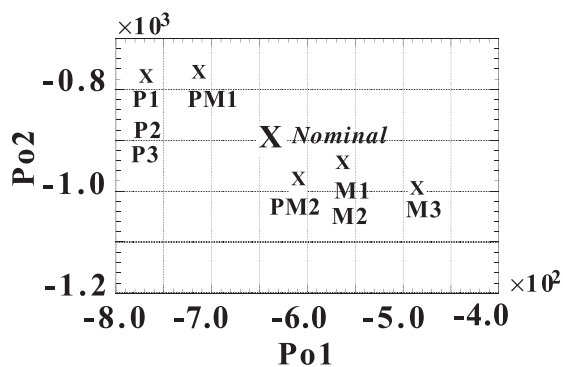


Fig. 12 Pole placement on plant B

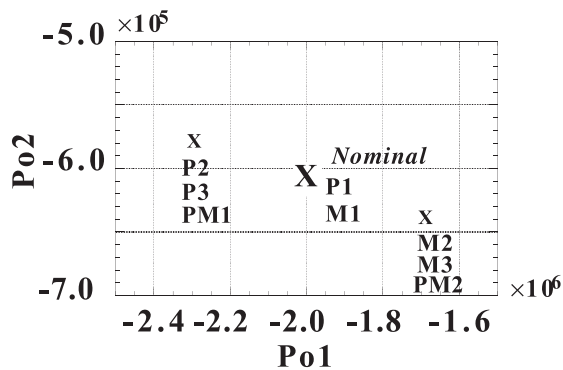


Fig. 13 Pole placement on plant C

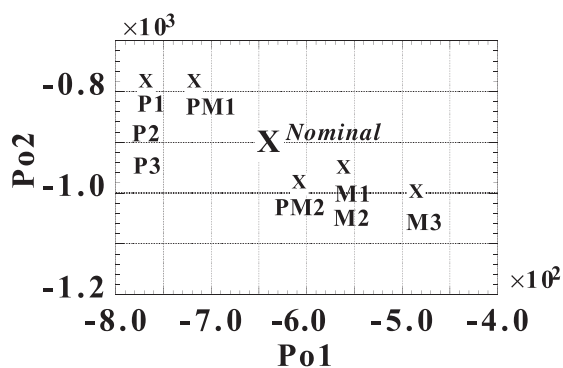


Fig. 14 Pole placement on plant D

### 4.3 LMI に基いた $H_\infty$ コントローラによる極配置

ここでは、図 2 に示す閉ループ系の極の位置について考える。1 次系のプラントについて LMI に基いた  $H_\infty$  コントローラを求めると 1 次系になるため、閉ループ系は 2 次系になる。図 11 から図 14 に、表 4 に示す 9 種類の場合について 2 個の極  $P_{o1}$  及び  $P_{o2}$  の配置を示す。ここで、極は **X** で表し、ノミナル値は大きな文字で表現している。なお、極はコントローラの 8 ビットマイクロプロセッサ実装時を考慮して有効数字 2 桁で表現している。このため、異なるモデル化誤差のパターンでも極の位置が同一になる場合がある。図 11 から図 14 に共通してノミナルな極の位置を中心に右下がりな傾向がある。 $\Delta_a$  を増加させると変化しない場もあるが、 $P_{o1}$  は負の方向に、 $P_{o2}$  は正の方向に向かう (P1)。逆に  $\Delta_a$  を減少させると  $P_{o1}$  は正の方向に、 $P_{o2}$  は負の方向に向かう (M1)。 $\Delta_b$  を増加させると  $P_{o1}$  は負の方向に、 $P_{o2}$  は正の方向に向かう (P2)。逆に  $\Delta_b$  を減少させると  $P_{o1}$  は正の方向に、 $P_{o2}$  は負の方向に向かう (M2)。 $\Delta_a$  及び  $\Delta_b$  を両方とも増加させると  $P_{o1}$  は負の方向に、 $P_{o2}$  は正の方向に向かう (P3)。 $\Delta_a$  及び  $\Delta_b$  を両方とも減少させると  $P_{o1}$  は正の方向に、 $P_{o2}$  は負の方向に向かう (M3)。 $\Delta_a$  を減少させ、 $\Delta_b$  を増加させると  $P_{o1}$  は負の方向に、 $P_{o2}$  は正の方向に向かう (PM1)。 $\Delta_a$  を増加させ、 $\Delta_b$  を減少させると  $P_{o1}$  は正の方向に、 $P_{o2}$  は負の方向に向かう (PM2)。以上より、プラントのモデル化誤差が不安定な方向に向かうと他の極はより安定な位置に移動し、プラントのモデル化誤差が安定な方向に向かうと他の極は不安定な位置に移動する。このため、閉ループ系の安定性が維持され、どの場合の応答ほとんど同一になることがわかった。

## 5. 結論

アクティブサスペンションのためのコントローラを語長が短いマイクロプロセッサに実装する要素技術として、一般化プラントのシステムティックな導出方法を提案した。さらに、得られたロバストコントローラによりプラントパラメータ  $a$  及び  $b$  の大小に拘らず、モデル化誤差に対してロバストな制御系が実現できることがわかった。また、閉ループ系の極は、プラントのモデル化誤差に対応して系が安定になるようにその位置が変化することがわかった。

## 6. 参考文献

- [1] T.P.J. van der Sande, B.L.J. Gysen, I.J.M. Besselink, J.J.H. Paulides, E.A. Lomonova, H. Nijmeijer, "Robust control of an electromagnetic active suspension system: Simulations and measurement," ELSEVIER, Mechatronics, pp.204–212, 2012
- [2] 蛭原 義雄 "LMI によるシステム制御 ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ," 森北出版株式会社, 第 1 版, 第 1 刷, pp.151–196, 2012/3/2.
- [3] 青木立, 井上稔, "LMI に基づいた  $H_\infty$  制御による自動車のアクティブサスペンション," 東京都立産業技術高等専門学校 研究紀要, Vol. 10, pp.16–20, 2016
- [4] <https://yalmip.github.io/>
- [5] <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>
- [6] Steen Tøfner-Clausen, "System Identification and Robust Control A case Study Approach," Springer, pp.61–64, 1996