ユークリッド空間における微分形式の導入

Introduction of Differential Forms in Euclidean Spaces

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract : Differential forms are useful mathematical tools in physics and engineerings. For example, they often give simpler expressions for formulas expressed by vector fields, which lead to a deeper understanding of physical phenomena. In general theory of differentiable manifolds, however, the definition of differential forms is based on the concept of tangent vectors, which is rather abstract for students of engineering. On the other hand, the definition of differential forms in physics and engineerings can be simplified because they are defined on Euclidean spaces in most cases. In this paper, we give a simple introduction of differential forms in Euclidean spaces and show some useful applications of differential forms in vector analysis.

Keywords : Differential form, Euclidean space, Vector analysis

1. はじめに

微分形式は物理・工学において有用な数学概念である．例えば，微分形式はベクトル場で表現された公式に対してより簡潔な表現を与え，それが物理現象の深い理解に繋がることがしばしばある．しかし，微分多様体の一般論における微分形式の定義は接ベクトルの概念に基いており，工学系の学生にとっては抽象的過ぎる．一方，物理・工学に現れる微分形式の多くはユークリッド空間上で定義されているため，その定義を簡略化することが可能である．この論文では，ユークリッド空間上の微分形式を簡潔な方法で導入し，ベクトル解析における微分形式のいくつかの有用な応用を示す．

2. 準備

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．任意の自然数 n に対し，

$$\mathbb{R}_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

とおき，これを n 次元実数空間とよぶ．任意の $a \in \mathbb{R}_n$ に対し，その第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を a_i で表す．すなわち，

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

が成り立つ．任意の集合 S から $\mathbb{R}_n$ への任意の写像 $f : S \to \mathbb{R}_n$ に対し，f の定義域 S を記号 $D(f)$ で表す．さらに，f の第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とよばれる関数 $f_i : S \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：任意の $P \in S$ に対し，

東京都立産業技術高等専門学校　ものづくり工学科

$$f_i(P) = f(P)_i$$

逆に，n 個の関数 $f_i : S \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し，写像 $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : S \to \mathbb{R}_n$ を次のように定義する：任意の $P \in S$ に対し，

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n)(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P))$$

従って，任意の写像 $f : S \to \mathbb{R}_n$ に対し，

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

が成り立つ．次に，任意の自然数 n に対し，

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \middle| \, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

とおき，これを n 次元実数ベクトル空間とよぶ．任意の $b \in \mathbb{R}^n$ に対し，その第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を b_i で表す．すなわち，

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^n$ の要素は $\mathrm{n} \times 1$ 行列とみなすことにより，和，実数倍，行列による積が定義される．また，任意の $b \in \mathbb{R}^n$ のノルム $|b|$ を次の式で定義する．

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

さらに，任意の $a, p \in \mathbb{R}_n$ に対し，$\overrightarrow{ap} \in \mathbb{R}^n$ を次の式で定義する．

$$\overrightarrow{ap} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ p_n - a_n \end{pmatrix}$$

3. 微分

最初に「偏微分」を定義する．

［定義 3.1］ M を任意の集合とし，M の任意の部分集合 S_1, S_2 上の写像 $f : S_1 \to \mathbb{R}_m, \varphi : S_2 \to \mathbb{R}_n$ を考える．n 以下の自然数 i，$A \in S_1 \cap S_2$ に対し，$\varphi(P)$ と $\varphi(A)$ の i 番目以外の成分が等しいという条件の下での条件付き極限値

$$\lim_{\varphi(P) \to \varphi(A)} \frac{\overrightarrow{f(A)f(P)}}{\varphi_i(P) - \varphi_i(A)} \quad (\forall j \neq i, \, \varphi_j(P) = \varphi_j(A))$$

が存在するとき，その値（$\mathbb{R}^m$ の要素）を $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i}(A)$ と書き，f の点 A における φ_i による偏微分係数（ベクトル）という．またこのとき，f は点 A において φ_i で偏微分可能であるという．f が φ_i で偏微分可能な点の集合を S とするとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ は集合 S から $\mathbb{R}^m$ への写像とみなすことができる．この写像を f の φ_i による偏微分という．またこのとき，f は S において φ_i で偏微分可能であるという．

次に「微分」を定義する．

［定義 3.2］ M を任意の集合とし，M の任意の部分集合 S_1, S_2 上の写像 $f : S_1 \to \mathbb{R}_m, \varphi : S_2 \to \mathbb{R}_n$ を考える．$A \in S_1 \cap S_2$ に対し，m 行 n 列の実数行列 $\dfrac{df}{d\varphi}(A)$ で次の式を満たすものがただひとつ存在するとき，この行列 $\dfrac{df}{d\varphi}(A)$ を f の点 A における φ による微分係数（行列）という．

$$\lim_{\varphi(P)\to\varphi(A)} \left|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(P)}\right|^{-1} \left(\overrightarrow{f(A)f(P)} - \frac{df}{d\varphi}(A)\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(P)}\right) = 0$$

またこのとき，f は点 A において φ で微分可能であるという．f が φ で微分可能な点の集合を S とするとき，$\dfrac{df}{d\varphi}$ は集合 S から $\mathbb{R}_n^m$（m 行 n 列の実数行列全体の集合）への写像とみなすことができる．この写像を f の φ による微分という．またこのとき，f は S において φ で微分可能であるという．

f が点 A において φ で微分可能かつ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ で偏微分可能であるとき，次の式が成り立つ．

$$\frac{df}{d\varphi}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1}(A) & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_n}(A) \\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_1}(A) & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_n}(A) \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial\varphi_1}(A) & \frac{\partial f_m}{\partial\varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial\varphi_n}(A) \end{pmatrix}$$

さらに，次の定理（連鎖律）が証明される (証明略)．

［定理 3.3］ f, α が集合 M の部分集合から $\mathbb{R}_m$ への写像とする．点 $A \in D(f) \cap D(\alpha)$ に対し，点 A を含む M の部分集合から $\mathbb{R}_n$ への写像 φ で $\varphi(A)$ が $\varphi(D(f) \cap D(\varphi))$ の内点になっているものを考える．f が点 A において φ で微分可能，φ が点 A において α で微分可能であるとき，f は点 A において α で微分可能であり，次の式が成り立つ．

$$\frac{df}{d\alpha}(A) = \frac{df}{d\varphi}(A)\frac{d\varphi}{d\alpha}(A)$$

4. ユークリッド空間

微分形式は，任意の微分多様体上で定義される．しかし，物理・工学に現れる微分形式はユークリッド空間上の微分形式と見なせる場合が多い．そこで，ユークリッド空間の定義を述べる．

［定義 4.1］ $\mathbb{E}$ を集合，$\mathbb{V}(\mathbb{E})$ を，内積・を持つ n 次元実ベクトル空間とする．集合 $\mathbb{E}$ の任意の 2 点 A, B に対して $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ が定められていて次の条件を満たすとき，$\mathbb{E}$ を n 次元ユークリッド空間という：

(1) 任意の $A, B, C \in E$ に対し，$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(2) 任意の $A \in \mathbb{E}$，任意の $v \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ に対し，$\overrightarrow{AB} = v$ となる点 $B \in \mathbb{E}$ がただひとつ存在する

$\mathbb{E}$ を n 次元ユークリッド空間とする．任意の $A \in \mathbb{E}$，任意の $v \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ に対し，$\overrightarrow{AB} = v$ となる点 $B \in \mathbb{E}$ を $A + v$ で表すこととする．さらに順序対 (A, v) を記号 v_A で表し，点 A を始点とする「束縛ベクトル」と呼ぶ．線分 AB 上の点の集合は $AB = \{A + tv \mid t \in [0, 1]\}$（$[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$）と表されるが，$v \neq 0$ の場合は次のようにして v_A を AB 上の関数と見なす：任意の $t \in [0, 1]$ に対し，

$$v_A(A + tv) = t$$

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の点 O とベクトル空間 $\mathbb{V}(\mathbb{E})$ の正規直交基底 $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ に対し，写像 $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_n$ を次のように定義し，$\mathbb{E}$ の正規直交座標という：任意の $c \in \mathbb{R}_n$ に対し，

$$\varphi(O + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n) = c$$

ユークリッド空間上では，写像の写像による微分可能性とは別に，写像自身の微分可能性を定義することができる．

［定義 4.2］ $\mathbb{E}$ の部分集合 S から $\mathbb{R}_m$（m は自然数）への写像 f が $A \in S$ において微分可能であるとは，$\mathbb{E}$ のひとつの（従って全ての）正規直交座標 φ に対し，f が A において φ で微分可能であることとする．f が S の任意の点において微分可能であるとき，f は微分可能であるという．

5. 全微分

S を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合とする．

［定義 5.1］ S 上に始点を持つ束縛ベクトルの集合を $B(S)$ と書く．すなわち，

$$B(S) = \{v_A \mid v \in \mathbb{V}(\mathbb{E}),\ A \in S\}$$

次に「全微分」を定義する．

［定義 5.2］ S から $\mathbb{R}_m$（m は自然数）への微分可能写像 f に対し，$B(S)$ から $\mathbb{R}^m$ の写像 df を次のように定義し，f の全微分とよぶ：任意の $v_A \in B(S)$ に対し，$v = 0$ ならば $df(v_A) = 0$ とし，$v \neq 0$ ならば

$$df(v_A) = \frac{df}{dv_A}(A) = \lim_{v_A(P) \to 0} \frac{\overrightarrow{f(A)f(P)}}{v_A(P)}$$

この全微分 df の幾何的意味を考察する．定義式より，$v_A(E)$ が十分小さい正の数であるなら，

$$df(v_A) \approx \frac{\overrightarrow{f(A)f(E)}}{v_A(E)}$$

すなわち，

$$v_A(E) df(v_A) \approx \overrightarrow{f(A)f(E)} \qquad (*)$$

となる．ここで $E = A + tv$ と書けるので，

$$w = tv = \overrightarrow{AE}$$

とおく．任意の $P = A + sw$（$0 < s \leqq 1$）に対し，

$$v_A(P) = v_A(A + stv) = st = w_A(P) v_A(E)$$

すなわち

$$w_A(P) = \frac{v_A(P)}{v_A(E)}$$

これより，

$$df(w_A) = \lim_{w_A(P) \to 0} \frac{\overrightarrow{f(A)f(P)}}{w_A(P)}$$

$$= \lim_{v_A(P) \to 0} v_A(E) \frac{\overrightarrow{f(A)f(P)}}{v_A(P)} = v_A(E) df(v_A)$$

これと w の定義によって $(*)$ を書き変えると，

$$df(w_A) \approx \overrightarrow{f(A)f(A+w)}$$

すなわち,「十分小さい」ベクトル w に関しては，$df(w_A)$ は始点 A での f の値に対する終点 $A+w$ での f の値の増分を表す．したがって，例えば $\mathbb{E}$ が物理空間である場合にはその図の中に微小な矢印 w_A を記入し，その終点と始点における f の値の差を $df(w_A)$ とすることができる．

S_1, S_2 を M の任意の部分集合とする．$B(S_1)$ 上の関数 ω と $B(S_2)$ 上の関数 η に対し，$B(S_1 \cap S_2)$ 上の関数 $\omega + \eta$ を次のように定義する：任意の $v_A \in B(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(\omega + \eta)(v_A) = \omega(v_A) + \eta(v_A)$$

また，$B(S_1)$ 上の関数 ω と S_2 上の関数 f に対し，$B(S_1 \cap S_2)$ 上の関数 $f\omega$ を次のように定義する：任意の $v_A \in B(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(f\omega)(v_A) = f(A)\omega(v_A)$$

このとき，次の定理が成り立つ．

［定理 5.3］ S から $\mathbb{R}_m$（m は自然数）への微分可能写像 f，$v_A \in B(S)$，正規直交座標 φ に対し，

$$df(v_A) = \frac{df}{d\varphi}(A)d\varphi(v_A)$$

［証明］ $v = 0$ ならば明らか．$v \neq 0$ ならば

$$df(v_A) = \frac{df}{dv_A}(A) = \frac{df}{d\varphi}(A)\frac{d\varphi}{dv_A}(A) = \frac{df}{d\varphi}(A)d\varphi(v_A)$$

［系 5.4］ S から $\mathbb{R}_m$ への微分可能写像 f，正規直交座標 φ に対し，

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}d\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_n}d\varphi_n$$

[系 5.5] S から $\mathbb{R}_m$ への微分可能写像 f，$v_A \in B(S)$，$\mathbb{V}(\mathbb{E})$ の正規直交基底 e による正規直交座標 φ に対し，

$$df(v_A) = \frac{df}{d\varphi}(A)e^{-1}v$$

ただし，$e^{-1}v \in \mathbb{R}^n$ は e に関する v の成分を表す．

［証明］ $v = 0$ の場合は明らか．$v \neq 0$ の場合，

$$\begin{aligned} d\varphi(v_A) &= \frac{d\varphi}{dv_A}(A) = \lim_{v_A(P)\to 0} \frac{\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(P)}}{v_A(P)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A+tv)}}{v_A(A+tv)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-1}(tv)}{t} = e^{-1}v \end{aligned}$$

なので定理 5.3 より，

$$df(v_A) = \frac{df}{d\varphi}(A)e^{-1}v$$

6. 微分形式

全微分 df は「1 次微分形式」の一種である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合 S と自然数 r に対し，

$$B_r(S) = \{(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) \mid A \in S,\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{V}(\mathbb{E})\}$$

とおくと，微分形式の定義は次のように述べることができる．

［定義 6.1］ $B_r(S)$ 上の関数 ω が以下の条件を満たすとき，ω を S 上の r 次微分形式という：任意の $A \in S$，任意の $(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) \in B_r(S)$，$r$ 以下の任意の異なる自然数 i に対し，

(1) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\omega(v_{1A}, \ldots, (cv_i)_A, \ldots, v_{rA}) = c\omega(v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA})$$

ただし，$v_{1A}, \ldots, (cv_i)_A, \ldots, v_{rA}$ は $v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA}$ の v_{iA} を $(cv_i)_A$ で置き換えたものを表す．

(2) 任意の $w \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ に対し，

$$\omega(v_{1A}, \ldots, (v_i + w)_A, \ldots, v_{rA}) = \omega(v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA}) + \omega(v_{1A}, \ldots, w_A, \ldots, v_{rA})$$

ただし，$v_{1A}, \ldots, (v_i + w)_A, \ldots, v_{rA}$ は $v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA}$ の v_{iA} を $(v_i + w)_A$ で置き換えたもの，$v_{1A}, \ldots, w_A, \ldots, v_{rA}$ は $v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA}$ の v_{iA} を w_A で置き換えたものを表す．

(3) j を i と異なる r 以下の任意の自然数とするとき，

$$\omega(v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{jA}, \ldots, v_{rA}) = -\omega(v_{1A}, \ldots, v_{jA}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA})$$

ただし，$v_{1A}, \ldots, v_{jA}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{rA}$ は $v_{1A}, \ldots, v_{iA}, \ldots, v_{jA}, \ldots, v_{rA}$ の v_{iA} と v_{jA} を交換したものを表す．

また，S 上の関数自体は 0 次微分形式とみなす．

［定理 6.2］ S 上の微分可能関数 f に対し，df は S 上の 1 次微分形式である．

［証明］ 任意の $v_A \in B(S)$，任意の正規直交基底 e による正規直交座標 φ に対し，

$$df(v_A) = \frac{df}{d\varphi}(A)e^{-1}v$$

であること（系 5.5）を用いて，微分形式の条件を確認することができる．

S_1, S_2 を M の任意の部分集合とする．S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上の r 次微分形式 η に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の r 次微分形式 $\omega + \eta$ を次のように定義する：任意の $(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) \in B_r(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(\omega + \eta)(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) = \omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) + \eta(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})$$

また，S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上関数 f に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の r 次微分形式 $f\omega$ を次のように定義する：任意の $(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) \in B_r(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(f\omega)(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}) = f(A)\omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})$$

7. 外積と成分表示

微分形式同士の積（外積）を定義する．

［定義 7.1］ S_1, S_2 を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合とする．S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上の s 次微分形式 η に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の $r + s$ 次微分形式 $\omega\eta$ を次のように定義する：任意の $(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{(r+s)A}) \in B_{r+s}(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(\omega\eta)(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{(r+s)A})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)\omega(v_{\sigma(1)A}, v_{\sigma(2)A}, \ldots, v_{\sigma(r)A})\eta(v_{\sigma(r+1)A}, v_{\sigma(r+2)A}, \ldots, v_{\sigma(r+s)A})$$

ただし，σ は $\{1, 2, \ldots, r+s\}$ の置換，$\mathrm{sgn}\sigma$ はその符号を表す．この $\omega\eta$ を ω と η の「外積」という．

具体例として，$r = s = 1$ の場合は，

$$(\omega\eta)(v_{1A}, v_{2A}) = \frac{1}{2}[\omega(v_{1A})\eta(v_{2A}) - \omega(v_{2A})\eta(v_{1A})]$$

$r = 1, s = 2$ の場合は，

$$(\omega\eta)(v_{1A}, v_{2A}, v_{3A}) = \frac{1}{3}[\omega(v_{1A})\eta(v_{2A}, v_{3A}) + \omega(v_{2A})\eta(v_{3A}, v_{1A}) + \omega(v_{3A})\eta(v_{1A}, v_{2A})]$$

定義より，$\omega\eta = (-1)^{r+s}\eta\omega$．特に r が奇数の場合，$\omega\omega = -\omega\omega$ なので $\omega\omega = 0$ となる．

S 上の r 次微分形式 ω，正規直交基底 e による正規直交座標 φ，n 以下の自然数 $i(1), i(2), \ldots, i(r)$ に対し，S 上の関数 $\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}$ を次のように定義する：任意の $A \in S$ に対し，

$$\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A) = \omega(e_{i(1)A}, e_{i(2)A}, \ldots, e_{i(r)A})$$

このとき，微分形式は次のように成分表示される．

［定理 7.2］ S 上の r 次微分形式と，正規直交基底 e による正規直交座標 φ に対し，

$$\omega = \sum_{i}\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}$$

ただし，i は $\{1, 2, \ldots, r\}$ から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全ての写像をとる．

［証明］ 任意の $v_A \in B(S)$ と $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，

$$d\varphi_i(v_A) = \frac{d\varphi_i}{dv_A}(A) = \lim_{t\to 0}\frac{tv\ \boldsymbol{\cdot} e_i}{t} = v \boldsymbol{\cdot} e_i$$

これより，

$$v_A = \sum_{i=1}^{n}(v \boldsymbol{\cdot} e_i)e_{iA} = \sum_{i=1}^{n}d\varphi_i(v_A)e_{iA}$$

が成り立つので，$v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA} \in B(S)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})\\
&= \sum_{i}d\varphi_{i(1)}(v_{1A})\cdots d\varphi_{i(r)}(v_{rA})\omega(e_{i(1)A}, \ldots, e_{i(r)A})\\
&= \sum_{i}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}d\varphi_{i(\sigma(1))}(v_{1A})\cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(v_{rA})\omega(e_{i(\sigma(1))A}, \ldots, e_{i(\sigma(r))A})\\
&= \sum_{i}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)d\varphi_{i(\sigma(1))}(v_{1A})\cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(v_{rA})\omega(e_{i(1)A}, \ldots, e_{i(r)A})\\
&= \sum_{i}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)d\varphi_{i(\sigma(1))}(v_{1A})\cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(v_{rA})\omega(e)_{i(1)\cdots i(r)}(A)
\end{aligned}$$

ここで，置換 σ の逆置換 τ を考えると，

$$\begin{aligned}
&\omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})\\
&= \sum_{i}\frac{1}{r!}\sum_{\tau}(\mathrm{sgn}\tau)d\varphi_{i(1)}(v_{\tau(1)A})\cdots d\varphi_{i(r)}(v_{\tau(r)A})\omega(e)_{i(1)\cdots i(r)}(A)
\end{aligned}$$

$$= \sum_i (d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{1A}, \ldots, v_{r(A)}) \omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A)$$

$$= \left(\sum_i \omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)} \right) (v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})$$

これが任意の $v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA}$ について成り立つので，

$$\omega = \sum_i \omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

8. 外微分

微分形式の微分（外微分）を定義する．まず，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合 S 上の r 次微分形式 ω とベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_r$ 対し，S 上の関数 $(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ を次のように定める：任意の $A \in S$ に対し，

$$(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_r)(A) = \omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA})$$

任意のベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_r$ に対し $(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ が微分可能であるとき，微分形式 ω は微分可能であるという．

［定義 8.1］ S を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合とする．S 上の微分可能な r 次微分形式 ω に対し，S 上の $r+1$ 次微分形式 $d\omega$ を次のように定義する：任意の $(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{(r+1)A}) \in B_{r+1}(S)$ に対し，

$$d\omega(v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{(r+1)A})$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) d(\omega, v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(r+1)})(v_{\sigma(1)A})$$

ただし，σ は $\{1, 2, \ldots, r+1\}$ の置換，$\mathrm{sgn}\sigma$ はその符号を表す．この $d\omega$ を ω の「外微分」という．

具体例として，$r = 1$ の場合は，

$$d\omega(v_{1A}, v_{2A}) = \frac{1}{2}[d(\omega, v_2)(v_{1A}) - d(\omega, v_1)(v_{1A})]$$

$r = 2$ の場合は，

$$d\omega(v_{1A}, v_{2A}, v_{3A}) = \frac{1}{3}[d(\omega, v_2, v_3)(v_{1A}) + d(\omega, v_3, v_1)(v_{2A}) + d(\omega, v_1, v_2)(v_{3A})]$$

また，定義により S 上の任意の微分可能 r 次微分形式，$a, b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$d(a\omega + b\omega) = ad\omega + bd\omega$$

となることが分かる．

［定理 8.2］ S を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合とする．S 上の微分可能関数 f，正規直交座標 φ に対し，

$$d(fd\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}) = dfd\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

ただし，$i(1), i(2), \ldots, i(r)$ は n 以下の任意の自然数を表す．

［証明］ $v_{1A}, v_{2A}, \ldots, v_{rA} \in B(S)$ に対し，

$$(d\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{1A}, \ldots, v_{rA}) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) d\varphi_{i(1)}(v_{1A}) \cdots d\varphi_{i(r)}(v_{rA})$$

の値は点 A によらず $v_1, v_2, \dots, v_r$ だけで決まるので，これを $c(v_1, \dots, v_r)$ で表すと，任意の $A \in S$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&(fd\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)}, v_1, \dots, v_r)(A) = f(A)(d\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{1A}, \dots, v_{rA}) \\
&= f(A)c(v_1, \dots, v_r) = (fc(v_1, \dots, v_r))(A)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，

$$(fd\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)}, v_1, \dots, v_r) = fc(v_1, \dots, v_r)$$

となる．これを用いると，$v_{1A}, v_{2A}, \dots, v_{(r+1)A} \in B(S)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&d(fd\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{1A}, v_{2A}, \dots, v_{(r+1)A}) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) d(fd\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)}, v_{\sigma(2)A}, \dots, v_{\sigma(r+1)A})(v_{\sigma(1)A}) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) d(fc(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}))(v_{\sigma(1)A}) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) df(v_{\sigma(1)A})c(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_\sigma (\mathrm{sgn}\sigma) df(v_{\sigma(1)A})(d\varphi_{i(1)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{\sigma(2)A}, \dots, v_{\sigma(r+1)A}) \\
&= (dfd\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)})(v_{1A}, v_{2A}, \dots, v_{(r+1)A})
\end{aligned}
$$

ここで $v_{1A}, v_{2A}, \dots, v_{(r+1)A} \in B(S)$ は任意なので，

$$d(fd\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}) = dfd\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

［例 8.3］ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合 S 上の微分可能関数 f, g, h と正規直交座標 (x, y, z) でつくられる 2 次微分形式

$$\omega = fdydz + gdzdx + hdxdy$$

の外微分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&d\omega = d(fdydz) + d(gdzdx) + d(hdxdy) \\
&= dfdydz + dgdzdx + dhdxdy \\
&= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}dz\right)dydz + \left(\tfrac{\partial g}{\partial x}dx + \tfrac{\partial g}{\partial y}dy + \tfrac{\partial g}{\partial z}dz\right)dzdx \\
&\quad + \left(\tfrac{\partial h}{\partial x}dx + \tfrac{\partial h}{\partial y}dy + \tfrac{\partial h}{\partial z}dz\right)dxdy \\
&= \tfrac{\partial f}{\partial x}dxdydz + \tfrac{\partial g}{\partial y}dydzdx + \tfrac{\partial h}{\partial z}dzdxdy \\
&= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{\partial g}{\partial y} + \tfrac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz
\end{aligned}
$$

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合 S 上の r 次微分形式 ω と任意の $v_1, v_2, \dots, v_r$ に対し，S 上の関数 $(\omega, v_1, v_2, \dots, v_r)$ の正規直交座標による 2 回偏微分が存在して連続であるとき，ω は 2 回連続微分可能であるという．

［定理 8.4］ n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}$ の部分集合 S 上の r 次微分形式 ω が 2 回連続微分可能であるとき，

$$dd\omega = 0$$

［証明］ ω を正規直交座標 φ で成分表示すると，

$$\omega = \sum_i \omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

外微分すると，

$$d\omega = \sum_i d[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}] d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

$$= \sum_i \sum_{p=1}^n \frac{\partial[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_p} d\varphi_p d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

再度外微分して，

$$dd\omega = \sum_i \sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k} d\varphi_k d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

$$= \sum_i \sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k} d\varphi_k d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

$$= \sum_i \sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k} d\varphi_k d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

$$= \sum_i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k$$

$$= \sum_{k<l} \frac{\partial^2[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k + \sum_{k>l} \frac{\partial^2[\omega(e)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k$$

$$= \sum_{k<l} \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k + \sum_{l>k} \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k \partial\varphi_l} d\varphi_k d\varphi_l$$

$$= \sum_{k<l} \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} d\varphi_l d\varphi_k - \sum_{k<l} \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k \partial\varphi_l} d\varphi_l d\varphi_k$$

$$= \sum_{k<l} \left(\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l \partial\varphi_k} - \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k \partial\varphi_l} \right) d\varphi_l d\varphi_k$$

$$= 0$$

であるから，前式に代入して，$dd\omega = 0$.

9. ベクトル場と微分形式

$\mathbb{E}$ を n 次元ユークリッド空間，φ をその正規直交基底，S を $\mathbb{E}$ の部分集合とする．S 上の r 次微分形式から S 上の $n-r$ 次微分形式への線形作用素 $*$ を次のように定義する：$\{1, 2, \ldots, n\}$ の任意の置換 σ に対し，

$$*(d\varphi_{\sigma(1)} d\varphi_{\sigma(2)} \cdots d\varphi_{\sigma(r)})|_{B_r(S)} = (\mathrm{sgn}\sigma)(d\varphi_{\sigma(r+1)} d\varphi_{\sigma(r+2)} \cdots d\varphi_{\sigma(n)})|_{B_{n-r}(S)}$$

この $*$ は Hodge のスター作用素とよばれる．

任意の $A \in S$ に対し $X_A \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ を対応させる写像 X を S 上のベクトル場という．S 上の任意の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ に対し，

$$X = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \cdots + f_n e_n$$

で表されるベクトル場，すなわち任意の $A \in S$ に対し

$$X_A = f_1(A) e_1 + f_2(A) e_2 + \cdots + f_n(A) e_n$$

を対応させるベクトル場 X に対し，S 上の 1 次微分形式

$$f_1 d\varphi_1 + f_2 d\varphi_2 + \cdots + f_n d\varphi_n$$

を記号 $\downarrow X$ で表す．また，逆に S 上の 1 次微分形式

$$\omega = f_1 d\varphi_1 + f_2 d\varphi_2 + \cdots + f_n d\varphi_n$$

に対し，S 上のベクトル場

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + \cdots + f_n e_n$$

を記号 $\uparrow \omega$ で表す．

以降，$n = 3$ とする．ベクトル解析で現れる種々のベクトル場は，微分形式を用いて以下のように表現することができる．E の部分集合 S 上の微分可能関数 f に対し，

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} e_3 = \uparrow df$$

S 上の微分可能ベクトル場 $X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$（$X_1, X_2, X_3 : S$ 上の関数）に対し，

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_3} = *d* \downarrow X$$

$$\mathrm{rot} X = \left(\tfrac{\partial X_3}{\partial \varphi_2} - \tfrac{\partial X_2}{\partial \varphi_3}\right) e_1 + \left(\tfrac{\partial X_1}{\partial \varphi_3} - \tfrac{\partial X_3}{\partial \varphi_1}\right) e_2 + \left(\tfrac{\partial X_2}{\partial \varphi_1} - \tfrac{\partial X_1}{\partial \varphi_2}\right) e_3 = \uparrow *d \downarrow X$$

S 上のベクトル場 $X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$（$X_1, X_2, X_3 : S$ 上の関数），$Y = Y_1 e_1 + Y_2 e_2 + Y_3 e_3$（$Y_1, Y_2, Y_3 : S$ 上の関数）に対し，

$$X \cdot Y = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 = *(\downarrow X * \downarrow Y)$$

$$X \times Y = (X_2 X_3 - X_3 X_2) e_1 + (X_3 X_1 - X_1 X_3) e_2 + (X_1 X_2 - X_2 X_1) e_3 = \uparrow *(\downarrow X \downarrow Y)$$

以上により，ベクトル解析における種々の恒等式を導くことができる．例えば，S 上の微分可能関数 f，微分可能ベクトル場 X に対し，

$$\mathrm{div}(fX) = *d* \downarrow (fX) = *d(f* \downarrow X) = *[(df)* \downarrow X + fd* \downarrow X]$$

$$= (\uparrow df) \cdot X + f * d* \downarrow X = (\mathrm{grad} f) \cdot X + \mathrm{fdiv} X$$

$$\mathrm{rot}(fX) = \uparrow *d \downarrow (fX) = \uparrow *[(df) \downarrow X + fd \downarrow X]$$

$$= (\uparrow df) \times X + f \uparrow *d \downarrow X = (\mathrm{grad} f) \times X + f(\mathrm{rot} X)$$

S 上の 2 回連続微分可能関数 f，2 回連続微分可能ベクトル場 X に対し，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \uparrow *d \downarrow \uparrow df = \uparrow *ddf = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot} X) = *d* \downarrow \uparrow *d \downarrow X = *ddX = 0$$

10. 積分公式

$\mathbb{E}$ を 3 次元ユークリッド空間とし，正規直交基底 e による正規直交座標 φ をとる．$\mathbb{E}$ 内の 3 次元領域 V 上の 3 次微分形式 dV を次のように定義する：任意の $u_A, v_A, w_A \in B(V)$ に対し，

$$dV(u_A, v_A, w_A) = \frac{1}{6}(u \times v) \cdot w$$

この dV を領域 V の体積要素という．

［定理 10.1］　$dV = d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$

［証明］ $u_A, v_A, w_A \in B(V)$ に対し，

$$\begin{aligned}
dV(u_A, v_A, w_A) &= \frac{1}{6}(u \times v) \cdot w \\
&= \frac{1}{6}[(d\varphi_2(u_A)d\varphi_3(v_A) - d\varphi_3(u_A)d\varphi_2(v_A))e_1 \\
&\qquad +(d\varphi_3(u_A)d\varphi_1(v_A) - d\varphi_1(u_A)d\varphi_3(v_A))e_2 \\
&\qquad +(d\varphi_1(u_A)d\varphi_2(v_A) - d\varphi_2(u_A)d\varphi_1(v_A))e_3] \\
&\quad \cdot [d\varphi_1(w_A)e_1 + d\varphi_2(w_A)e_2 + d\varphi_3(w_A)e_3] \\
&= \frac{1}{6}[(d\varphi_2(u_A)d\varphi_3(v_A) - d\varphi_3(u_A)d\varphi_2(v_A))d\varphi_1(w_A) \\
&\qquad +(d\varphi_3(u_A)d\varphi_1(v_A) - d\varphi_1(u_A)d\varphi_3(v_A))d\varphi_2(w_A) \\
&\qquad +(d\varphi_1(u_A)d\varphi_2(v_A) - d\varphi_2(u_A)d\varphi_1(v_A))d\varphi_3(w_A)] \\
&= (d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3)(u_A, v_A, w_A)
\end{aligned}$$

ここで $u_A, v_A, w_A \in B(V)$ は任意なので，

$$dV = d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$$

S を $\mathbb{E}$ 内の滑らかな曲面とする．S 上の $\mathbb{V}(\mathbb{E})$ 値 2 次微分形式 dS を次のように定義する：任意の任意の $v_A, w_A \in B(S)$ に対し，

$$dS(v_A, w_A) = \frac{1}{2}(v \times w)$$

この dS を曲面 S のベクトル面積要素という．

［定理 10.2］　$dS = e_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + e_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + e_3 d\varphi_1 d\varphi_2$

［証明］ $v_A, w_A \in B(V)$ に対し，

$$\begin{aligned}
dS(v_A, w_A) &= \frac{1}{2}(v \times w) \\
&= \frac{1}{2}[(d\varphi_2(v_A)d\varphi_3(w_A) - d\varphi_3(v_A)d\varphi_2(w_A))e_1 \\
&\quad +(d\varphi_3(v_A)d\varphi_1(w_A) - d\varphi_1(v_A)d\varphi_3(w_A))e_2 \\
&\quad +(d\varphi_1(v_A)d\varphi_2(w_A) - d\varphi_2(v_A)d\varphi_1(w_A))e_3] \\
&= \frac{1}{2}(d\varphi_2(v_A)d\varphi_3(w_A) - d\varphi_2(w_A)d\varphi_3(v_A))e_1 \\
&\quad +\frac{1}{2}(d\varphi_3(v_A)d\varphi_1(w_A) - d\varphi_3(w_A)d\varphi_1(v_A))e_2 \\
&\quad +\frac{1}{2}(d\varphi_1(v_A)d\varphi_2(w_A) - d\varphi_1(w_A)d\varphi_2(v_A))e_3 \\
&= (d\varphi_2 d\varphi_3)(v_A, w_A)e_1 + (d\varphi_3 d\varphi_1)(v_A, w_A)e_2 + (d\varphi_1 d\varphi_2)(v_A, w_A)e_3
\end{aligned}$$

$$= (e_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + e_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + e_3 d\varphi_1 d\varphi_2)(v_A, w_A)$$

ここで $v_A, w_A \in B(V)$ は任意なので，

$$dS = e_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + e_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + e_3 d\varphi_1 d\varphi_2$$

正規直交座標 φ の原点を O とし，次のようなベクトル値関数 r を考える：任意の点 $A \in \mathbb{E}$ に対し，

$$r(A) = \overrightarrow{OA} = \varphi_1(A)e_1 + \varphi_2(A)e_2 + \varphi_1(A)e_1 = (e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 + e_3\varphi_3)(A)$$

すなわち，

$$r = e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 + e_3\varphi_3$$

なので，この全微分は

$$dr = e_1 d\varphi_1 + e_2 d\varphi_2 + e_3 d\varphi_3$$

となる．この dr はベクトル値 1 次微分形式である．

以上の準備のもとで，ベクトル解析における「積分定理」は次のように表現される：

$$\int_{\partial V} X \cdot dS = \int_V (\mathrm{div} X) dV \quad \text{(Gauss)} \qquad \int_{\partial S} X \cdot dr = \int_S (\mathrm{rot} X) \cdot dS \quad \text{(Stokes)}$$

ただし，∂V は 3 次元領域 V の境界面，∂S は 2 次元曲面 S の境界線を表す．これらの定理は次の形に一般化される．

［定理 10.3］ 向き付けられた n 次元微分多様体 M 上の連続微分可能な $n-1$ 次微分形式 ω がコンパクトな台を持つとき，M の正則境界領域 D とその境界 ∂D に関して次が成り立つ．

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Gauss の定理は，定理 10.3 から次のように導かれる：ベクトル場 $X = X_1 e_1 + X_2 e_3 + X_3 e_3$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial V} X \cdot dS = \int_{\partial V} (X_1 e_1 + X_2 e_3 + X_3 e_3) \cdot (e_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + e_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + e_3 d\varphi_1 d\varphi_2) \\
&= \int_{\partial V} (X_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + X_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + X_3 d\varphi_1 d\varphi_2) \\
&= \int_V d(X_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + X_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + X_3 d\varphi_1 d\varphi_2) \\
&= \int_V (dX_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + dX_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + dX_3 d\varphi_1 d\varphi_2) \\
&= \int_V \left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_3} \right) d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = \int_V (\mathrm{div} X) dV
\end{aligned}$$

Stokes の定理は，定理 10.3 から次のように導かれる：ベクトル場 $X = X_1 e_1 + X_2 e_3 + X_3 e_3$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S} X \cdot dr = \int_{\partial S} (X_1 e_1 + X_2 e_3 + X_3 e_3) \cdot (e_1 d\varphi_1 + e_2 d\varphi_2 + e_3 d\varphi_3) \\
&= \int_{\partial S} (X_1 d\varphi_1 + X_2 d\varphi_2 + X_3 d\varphi_3) \\
&= \int_S d(X_1 d\varphi_1 + X_2 d\varphi_2 + X_3 d\varphi_3) = \int_S (dX_1 d\varphi_1 + dX_2 d\varphi_2 + dX_3 d\varphi_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_S \left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_3} \right) d\varphi_2 d\varphi_3 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi_3} - \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_1} \right) d\varphi_3 d\varphi_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_2} \right) d\varphi_1 d\varphi_2 \right] \\
&= \int_S \left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi_3} - \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_2} \right) e_3 \right] \\
&\qquad \cdot (e_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + e_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + e_3 d\varphi_1 d\varphi_2) \\
&= \int_S (\mathrm{rot} X) \cdot dS
\end{aligned}
$$

11. おわりに

文献 [7] においては，多様体における微分形式を,「接ベクトル」の代わりに「パラメータ曲線」を用いることによって初等的に定義した．ユークリッド空間においては,「接ベクトル」の代わりに「束縛ベクトル」を用いることによってさらに定義を簡潔かつ直観的にすることができるが，多様体の場合との整合性を考慮し，束縛ベクトルをパラメータ曲線の一種と見なすというのが本論文の手法の基本方針である．

工学においては，ユークリッド空間上の微分形式と多様体上の微分形式の両方が用いられる．例えば，電磁気学や弾性体論の舞台である「物理空間」は 3 次元ユークリッド空間と見なすことができるが，熱力学などにおける「状態空間」はユークリッド空間ではなく多様体として扱う必要がある．本稿の手法の利点のひとつは，ユークリッド空間上の微分形式論から多様体上の微分形式論にスムーズに移行できる点にある．

12. 参考文献

[1] 松島与三：多様体入門，裳華房，1965.

[2] 村上信吾：多様体，共立出版，1969.

[3] 杉浦光夫：解析入門 I，東京大学出版会，1980.

[4] 中西泰雄：ユークリッド空間における解析の基礎，日本数学教育学会高専部会研究論文誌，VOL.4，NO.1，1997.

[5] 中西泰雄：座標を持つ集合上の微分法の導入について，東京都立工業高等専門学校研究報告，第 40 号，2005.

[6] 中西泰雄：座標を持つ集合上の differential の導入法，東京都立産業技術高等専門学校研究紀要，第 2 号，2008.

[7] 中西泰雄：曲線による微分形式の導入，東京都立産業技術高等専門学校研究紀要，第 8 号，2014.