

# 固定小数点演算に基づいた適応型オブザーバ

～ 固定小数点マイクロプロセッサへの実装に関する課題 ～

## Adaptive Observer Based on Fixed-Point Arithmetic

— Problems on The Implementation of The Proposed Method to Fixed-Point Microprocessors —

青木 立<sup>1)</sup>, 川田 誠<sup>一2)</sup>

Tatsu Aoki<sup>1)</sup>, Seiichi Kawata<sup>2)</sup>

Abstract: In the embedded mechatronic systems, 8-bit or 16-bit fixed-point microprocessors are used for control to meet the requirement of small size, low power consumption, and low cost. Since the rigidity of miniaturized and lightened mechanism becomes low, mechanical vibration occurs at the multiple modes. The vibrational modes are changed by the operational condition. Thus, it is necessary to estimate these vibrational modes in real-time to achieve the damping control. In this series of cooperative research, an adaptive observer based on the delta form was proposed. This paper examines the feasibility of the implementation of this observer to fixed-point microprocessors. As an illustration, first-order-systems are considered. In the case of 8 bit word length, overflow and underflow occurs in this calculation and the adaptive system becomes unstable. In the case of 16 bit word length, the proposed observer can follow the time-varying plant parameters in real-time. Simulation results show that the proposed method can be implemented to fixed point microprocessors.

Keywords: System identification, Delta operator, Digital controller, Microprocessor control

### 1. はじめに

メカニズムの制御を目的とした組込みシステムでは、小型、低消費電力、低価格が要求されるため、基本語長が8ビットや16ビットの固定小数点マイクロプロセッサが多用されている。小型、軽量化されたメカニズムでは剛性が低下するため、複数の振動モードで振動する。携帯を目的とした組込みシステムでは、その使用状況により振動モードは変化する。制振制御を有効にするためには、これらの振動モードをリアルタイムで推定する必要がある。しかし、従来のシステム同定に関する研究では、固定小数点マイクロプロセッサによるリアルタイム処理について十分に考慮されていなかった[1]。本共同研究の目的は、固定小数点マイクロプロセッサを用いてプラントパラメータをリアルタイムで推定する手法の開発である。

最初にプラントパラメータの変化にリアルタイムに追従できる適応型オブザーバを提案した[2]。その特徴は、制御系をデルタ形式を用いて表現することによりパラメータ推定時の数値的不安定性を軽減できること、連続時間系における減衰係数や固有振動数などの物理パラメータが直接得られることである。次に、適応制御則を単純化するため単純適応制御を本手法に適用した[3]。一方、パラメータ推定では、一般に、逐次最小二乗法が用いられている。そこで、逐次最小二乗法の固定小数点マイクロプロセッサへの

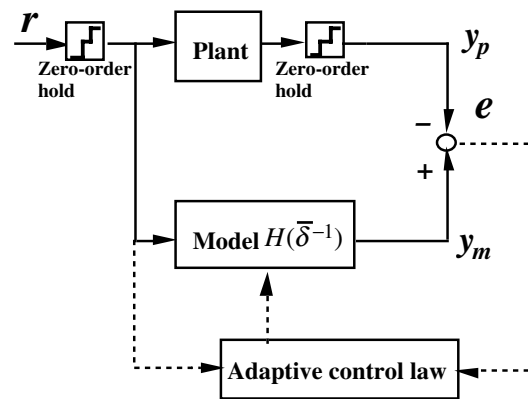


Fig. 1 Adaptive observer based on the delta form

実装に関する課題を抽出した[4]。また、提案手法を高次系に応用可能なように適応制御則を逆デルタオペレータ、すなわち、積分演算に基づいて導出した[5]。さらに、計測ノイズによるパラメータ推定誤差を軽減するため、外乱オブザーバ、ノイズリダクション手法、デルタシグマ変換手法を導入した[6-8]。パラメータ推定時間を短縮するため、適応制御における過渡応答を調節できる手法を提案した[9]。

本論文では、1次系に関して固定小数点演算によるパラメータ推定を行うことにより、提案手法の固定小数点マイクロプロセッサへの実装時における課題を抽出する。

1)東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科, 電気電子工学コース 2)産業技術大学院大学

## 2. 逆デルタオペレータに基づいた適応制御則の導出

1次系のプラントについて考える.

$$H_p(s) = \frac{b_p}{s + a_p} \quad (1)$$

式(1)を零次ホールドにより離散化する.

$$H_p(z) = \frac{b_{ps}}{z - a_{ps}} \quad (2)$$

ここで、以下に示す正規化デルタオペレータを用いて式(2)をデルタ形式に変換する.

$$\bar{\delta} = z - 1 \quad (3)$$

$$H_p(\bar{\delta}) = \frac{\bar{b}}{\bar{\delta} + \bar{a}} \quad (4)$$

式(4)に基づいて導出された適応制御則にはプラント出力 $y_p(k)$ とモデルの出力 $y_m(k)$ の偏差 $e(k)$ に関する微分項, すなわち,  $\bar{\delta}e(k)$ が含まれる. プラント出力 $y_p(k)$ には計測ノイズが混入するため, 偏差信号 $e(k)$ に関する微分演算を避ける必要がある. そこで, 式(4)を逆デルタオペレータ $\bar{\delta}^{-1}$ により表現する.

### • プラント

$$H_p(\bar{\delta}^{-1}) = \frac{\bar{b}\bar{\delta}^{-1}}{1 + \bar{a}\bar{\delta}^{-1}} \quad (5)$$

### • モデル

$$H_m(\bar{\delta}^{-1}) = \frac{\hat{b}(k+1)\bar{\delta}^{-1}}{1 + \hat{a}(k+1)\bar{\delta}^{-1}} \quad (6)$$

ここで,  $\hat{a}(k+1)$ と $\hat{b}(k+1)$ は, それぞれ,  $\bar{a}$ と $\bar{b}$ の推定値とする. 式(5)-(6)よりプラント $y_p(k)$ とモデル出力 $y_m(k)$ は

$$y_p(k) = -\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_p(k) + \bar{b}\bar{\delta}^{-1}r(k) \quad (7)$$

$$y_m(k) = -\hat{a}(k+1)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) + \hat{b}(k+1)\bar{\delta}^{-1}r(k) \quad (8)$$

となる. また, パラメータ推定誤差 $\tilde{a}(k)$ ,  $\tilde{b}(k)$ は

$$\tilde{a}(k+1) = \hat{a}(k+1) - \bar{a} \quad (9)$$

$$\tilde{b}(k+1) = \hat{b}(k+1) - \bar{b} \quad (10)$$

で与えられる. 式(7)-(10)より $e(k)$ 及びパラメータ推定誤差 $\tilde{a}(k)$ ,  $\tilde{b}(k)$ に関する関係式は,

$$\begin{aligned} e(k) &= y_m(k) - y_p(k) \\ &= \left( -\hat{a}(k+1)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) + \hat{b}(k+1)\bar{\delta}^{-1}r(k) \right) \\ &\quad - \left( -\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_p(k) + \bar{b}\bar{\delta}^{-1}r(k) \right) \\ &= \left( -\hat{a}(k+1)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) + \hat{b}(k+1)\bar{\delta}^{-1}r(k) \right) \\ &\quad - \left( -\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_p(k) + \bar{b}\bar{\delta}^{-1}r(k) \right) \\ &\quad + \bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k) - \bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k) \\ &= -\bar{a}\bar{\delta}^{-1}e(k) - \tilde{a}(k+1)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) \\ &\quad + \tilde{b}(k+1)\bar{\delta}^{-1}r(k) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ここで, 次のリアプノフ関数を考える.

$$\begin{aligned} V(k) &= (\bar{\delta}^{-1}e(k))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{a1}}\tilde{a}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{a2}}\tilde{a}^2(k) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{b1}}\tilde{b}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{b2}}\tilde{b}^2(k) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,  $\gamma_{a1}$ ,  $\gamma_{a2}$ ,  $\gamma_{b1}$ ,  $\gamma_{b2}$ は任意の正の定数とする. また,  $f_a(k)$ 及び $f_b(k)$ を以下のように定義する.

$$f_a(k) = \bar{\delta}\tilde{a}(k) \quad (13)$$

$$f_b(k) = \bar{\delta}\tilde{b}(k) \quad (14)$$

式(13)-(14)より次式が成立する.

$$\begin{aligned} (\bar{\delta}\tilde{a}(k))^2 - \tilde{a}^2(k) &= f_a^2(k) - (\tilde{a}(k+1) - f_a(k))^2 \\ &= 2\tilde{a}(k+1)f_a(k) - \tilde{a}^2(k+1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\delta}\tilde{b}(k))^2 - \tilde{b}^2(k) &= f_b^2(k) - (\tilde{b}(k+1) - f_b(k))^2 \\ &= 2\tilde{b}(k+1)f_b(k) - \tilde{b}^2(k+1) \end{aligned} \quad (16)$$

式(12)及び式(15)-(16)より $\Delta V(k)$ が求まる.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= e^2(k) - (\bar{\delta}^{-1}e(k))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{a1}} \left( (\bar{\delta}\tilde{a}(k))^2 - \tilde{a}^2(k) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{a2}} \left( (\bar{\delta}\tilde{a}(k))^2 - \tilde{a}^2(k) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{b1}} \left( (\bar{\delta}\tilde{b}(k))^2 - \tilde{b}^2(k) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{b2}} \left( (\bar{\delta}\tilde{b}(k))^2 - \tilde{b}^2(k) \right) \\ &= (\bar{a}^2 - 1) (\bar{\delta}^{-1}e(k))^2 \\ &\quad + \tilde{a}(k+1)e(k)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) \\ &\quad + \tilde{a}(k+1)\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \\ &\quad + \tilde{b}(k+1)e(k)\bar{\delta}^{-1}r(k) \\ &\quad - \tilde{b}(k+1)\bar{a}\bar{\delta}^{-1}r(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{a1}} (2\tilde{a}(k+1)f_a(k) - \tilde{a}^2(k+1)) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{a2}} (2\tilde{a}(k+1)f_a(k) - \tilde{a}^2(k+1)) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{b1}} (2\tilde{b}(k+1)f_b(k) - \tilde{b}^2(k+1)) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{b2}} (2\tilde{b}(k+1)f_b(k) - \tilde{b}^2(k+1)) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)において, 以下の4式が成立すると仮定する.

$$\tilde{a}(k+1) \left( e(k)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) + \frac{1}{\gamma_{a1}}f_a(k) \right) = 0 \quad (18)$$

$$\tilde{a}(k+1) \left( \bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) + \frac{1}{\gamma_{a2}}f_a(k) \right) = 0 \quad (19)$$

$$\tilde{b}(k+1) \left( e(k)\bar{\delta}^{-1}r(k) + \frac{1}{\gamma_{b1}}f_b(k) \right) = 0 \quad (20)$$

$$\tilde{b}(k+1) \left( -\bar{a}\bar{\delta}^{-1}r(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) + \frac{1}{\gamma_{b2}}f_b(k) \right) = 0 \quad (21)$$

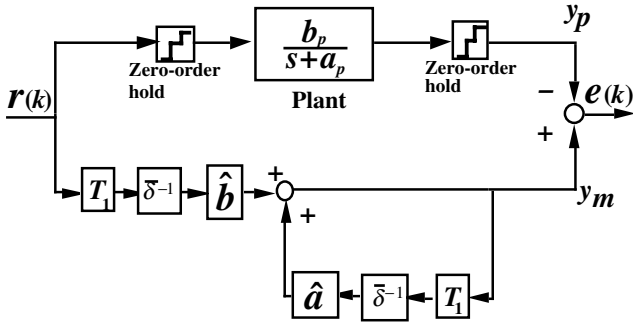


Fig. 2 Adaptive observer on the first-order system

推定パラメータがプラントパラメータに一致するまでは  $\tilde{a}(k+1) \neq 0$ ,  $\tilde{b}(k+1) \neq 0$  である. そこで, 式(18)-(21)から次式が成立する.

$$e(k)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) + \frac{1}{\gamma_{a1}}f_a(k) = 0 \quad (22)$$

$$\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) + \frac{1}{\gamma_{a2}}f_a(k) = 0 \quad (23)$$

$$e(k)\bar{\delta}^{-1}r(k) + \frac{1}{\gamma_{b1}}f_b(k) = 0 \quad (24)$$

$$-\bar{a}\bar{\delta}^{-1}r(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) + \frac{1}{\gamma_{b2}}f_b(k) = 0 \quad (25)$$

式(22)-(25)が成立するとき, 式(17)より  $\Delta V(k)$  は,

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= (\bar{a}^2 - 1)e^2(k) \\ &\quad - \frac{1}{2\gamma_{a1}}\tilde{a}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{a2}}\tilde{a}^2(k+1) \\ &\quad - \frac{1}{2\gamma_{b1}}\tilde{b}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{b2}}\tilde{b}^2(k+1) \end{aligned} \quad (26)$$

となる. 式(26)より  $|\bar{a}| < 1$  を考慮すると  $\Delta V(k) \leq 0$  となり,  $\bar{\delta}^{-1}e(k)$ ,  $\tilde{a}(k)$ ,  $\tilde{b}(k)$  が時間の経過とともに 0 に近づく. そこで, 式(22)-(25)を変形して適応制御則を求める.

$$f_a(k) = -\gamma_{a1}e(k)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) \quad (27)$$

$$f_a(k) = -\gamma_{a2}\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \quad (28)$$

$$f_b(k) = -\gamma_{b1}e(k)\bar{\delta}^{-1}r(k) \quad (29)$$

$$f_b(k) = \gamma_{b2}\bar{a}\bar{\delta}^{-1}r(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \quad (30)$$

式(9)-(10)と式(13)-(14)より

$$\hat{a}(k+1) - \hat{a}(k) = f_a(k) \quad (31)$$

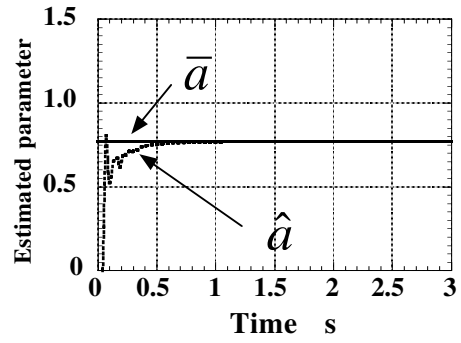
$$\hat{b}(k+1) - \hat{b}(k) = f_b(k) \quad (32)$$

が成立するため, 式(31)及び式(27)-(28), 式(32)及び式(29)-(30)を組み合わせるにより適応制御則が求まる.

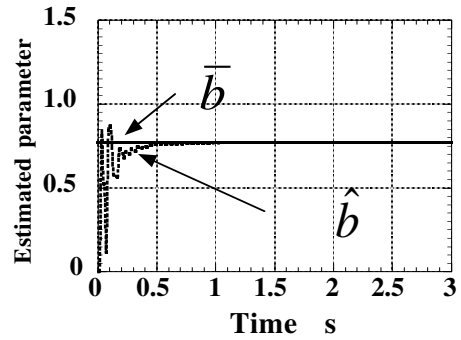
$$\begin{aligned} \hat{a}(k+1) &= \hat{a}(k) - \gamma_{a1}e(k)\bar{\delta}^{-1}y_m(k) \\ &\quad - \gamma_{a2}\bar{a}\bar{\delta}^{-1}y_m(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(k+1) &= \hat{b}(k) - \gamma_{b1}e(k)\bar{\delta}^{-1}r(k) \\ &\quad + \gamma_{b2}\bar{a}\bar{\delta}^{-1}r(k)\bar{\delta}^{-1}e(k) \end{aligned} \quad (34)$$

なお, 高次系に関する適応制御則はプラントの状態方程式を用いて1次系と同様の手順により求まる[5].



(a)  $\hat{a}(k)$



(b)  $\hat{b}(k)$

Fig. 3 Parameter estimation by using floating-point arithmetic

### 3. 適応型オブザーバによるパラメータ推定結果

#### 3.1 適応型オブザーバ

図2に1次系に関する適応型オブザーバを示す. ここで,  $T_1$  は設計パラメータである.  $T_1$  をサンプリング周期の  $n$  倍の値に設定すると, 推定値は  $1/n$  になる. このため, 固定小数点演算では推定値として設定している変数がオーバーフローしないように  $T_1$  を設定する必要がある.

#### 3.2 シミュレーション環境

シミュレーションには Matlab/Simulink 及び Fixed-Point Toolbox を用いた. サンプリング周期  $T$  は 1ms に設定し, プラントの入力は以下に示す正弦波を用いた.

$$r(k) = \sin(2\pi 20kT) \quad (35)$$

#### • プラント

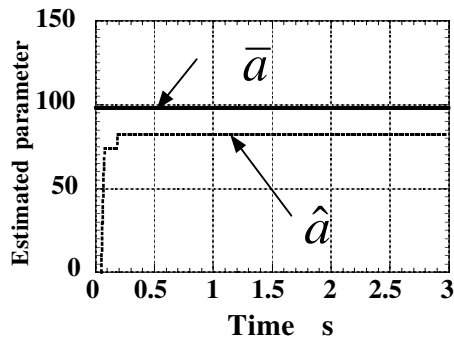
$$H_p(s) = \frac{80}{s+80} \quad (36)$$

#### 3.3 浮動小数点演算に基づいたパラメータ推定

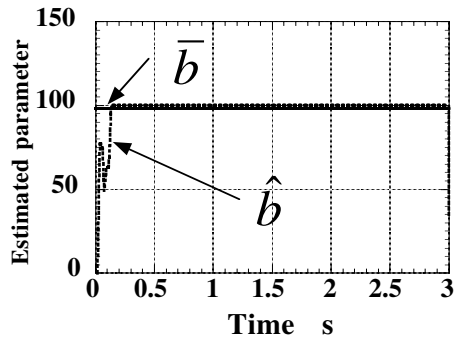
パラメータ推定値  $\hat{a}(k)$  及び  $\hat{b}(k)$  を  $\pm 1$  の範囲内に収めるため,  $T_1$  を  $100T$  に設定した. この値を後述する固定小数点演算の場合にも適用する. 適応制御ゲインを以下に示す.

$$\{\gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{b1}, \gamma_{b2}\} = \{0.0, 0.07, 0.0, -0.07\}$$

図3にパラメータ推定結果を示す. 推定値  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  がプラントパラメータ  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  にそれぞれ収束している.



(a)  $\hat{a}(k)$



(b)  $\hat{b}(k)$

Fig. 4 Parameter estimation with 8 bit word length

### 3.4 固定小数点演算に基づいたパラメータ推定

#### 3.4.1 語長の違いによるパラメータ推定誤差

適応制御ゲインを以下に示す.

$$\{\gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{b1}, \gamma_{b2}\} = \{0.0, 0.1, 0.0, -0.1\}$$

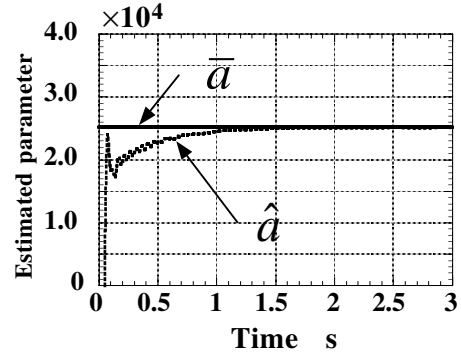
図4及び図5に語長が8ビットの場合と16ビットの場合のパラメータ推定結果をそれぞれ示す. スケーリングは, 語長が8ビットの場合,  $1.0 \cong 127$ , 語長が16ビットの場合,  $1.0 \cong 32767$ に設定した. 語長が8ビットの場合, アンダフローによる推定誤差が発生している. 適応ゲインを大きくすると推定値がオーバーフローし, 制御系が不安定になった. 語長が16ビットの場合, 浮動小数点演算と同様の結果が得られた. 従って, 固定小数点演算によるパラメータ推定では, 語長が8ビットでは不十分であることがわかった.

#### 3.4.2 計測ノイズによるパラメータ推定誤差

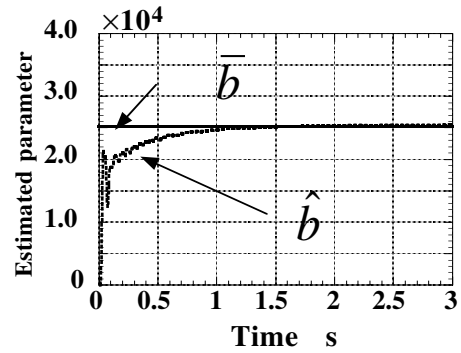
プラント出力 $y_p(k)$ に計測ノイズとしてパワースペクトル密度が $1.0 \times 10^{-7}$ のホワイトノイズが混入したときのパラメータ推定結果を図6に示す. 計測ノイズにより推定誤差が発生している. この推定誤差を改善するため, 計測ノイズを次式により推定し, モデル出力 $y_m(k)$ に加える[5].

$$\hat{d}(k+1) = \hat{d}(k) - \gamma_{a1}e(k) + \gamma_{a2}\delta^{-1}e(k) \quad (37)$$

図7に $\gamma_{a1} = 0$ ,  $\gamma_{a2} = -0.05$ ,  $\gamma_{b2} = 0.2$ ,  $\gamma_{b1} = -0.1$ に設定したときの推定結果を示す. 推定誤差が減少している.

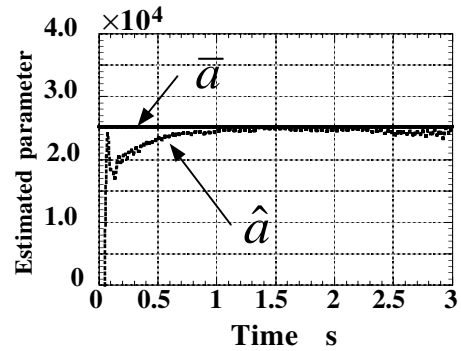


(a)  $\hat{a}(k)$

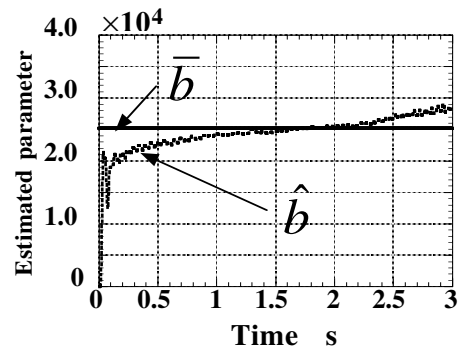


(b)  $\hat{b}(k)$

Fig. 5 Parameter estimation with 16 bit word length



(a)  $\hat{a}(k)$



(b)  $\hat{b}(k)$

Fig. 6 Parameter estimation with measurement noise

### 3.4.3 適応制御系に関する検証

図8にプラントパラメータ $a_p$ ,  $b_p$ を1.5s後, それぞれ, 1.2倍, 0.8倍にステップ的に変化したときのパラメータ推定結果を示す. 変化したプラントパラメータがリアルタイムで推定されている.

## 4. 固定小数点マイクロプロセッサへの実装時の課題

パラメータ値が未知のため, 固定小数点演算では演算途中でオーバーフローやアンダフローが発生し, 適応制御系が不安定になる可能性がある. そこで, オーバーフローやアンダフローを自動的に回避する手法を考案する必要がある.

## 5. 結論

提案手法の固定小数点マイクロプロセッサへの実装を想定し, 1次系に関して固定小数点演算によるパラメータ推定を行った. その結果, プラントのパラメータ変化にリアルタイムで追隨してパラメータを推定することができた.

## 6. 謝辞

本研究は平成23年度より設置された公立大学法人 首都大学東京 大学・高専連携事業基金による共同研究, 組込み型メカトロニックシステムの実用化に関する研究 (研究期間3年) の助成によって行われた.

## 7. 参考文献

- [1] L. Ljung, Perspectives on Systems Identification, Proc. of IFAC World Congress 2008, 27-15, pp.15736-15747, 2008
- [2] T. Aoki, S.Kawata, On-Line Physical Parameter Estimation by Using Model Reference Adaptive Control Method based on the Modified Delta Form, Proc. of SICE Annual Conference, pp.1897-1902, 2011
- [3] 青木立, 川田誠一, 単純適応制御に基づいたシステムモデリング-デルタ形式による物理量のリアルタイム推定-, 第54回自動制御連合講演会予稿集, pp.351-354, 2011
- [4] 青木立, 川田誠一, システム同定アルゴリズムに関するロバスト性の検証-逐次最小二乗法に関する検証-, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, 6, pp.19-23, 2012
- [5] T. Aoki, S.Kawata, Robust Physical Parameter Estimation by Using MRAC Based on the Inverse Normalized Delta Operator, Proc. of SICE Annual Conference 2012, pp.1110-1115, 2012
- [6] 青木立, 川田誠一, モデル規範型制御を応用したシステムモデリング-外乱オブザーバの導入によるパラメータ推定精度の向上-, 第55回自動制御連合講演会予稿集, pp.811-814, 2012
- [7] 青木立, 川田誠一, ノイズリダクション手法を応用したロバストパラメータ推定-逐次最小二乗法に関する検証-, 東京都立産業技術高等専門学校研究紀要, 7, pp.72-76, 2013
- [8] 青木立, 川田誠一, デルタ形式に基づいた適応型オブザーバによる物理パラメータのリアルタイム推定-デルタシグマ変調に基づいた手法によるロバストパラメータ推定-, 第56回自動制御連合講演会予稿集, pp.358-361, 2013
- [9] T. Aoki, S.Kawata, MRAC Based Parameter Estimation by using Built in Filter, Proc. of SICE Annual Conference 2013, pp. 733-737, 2013

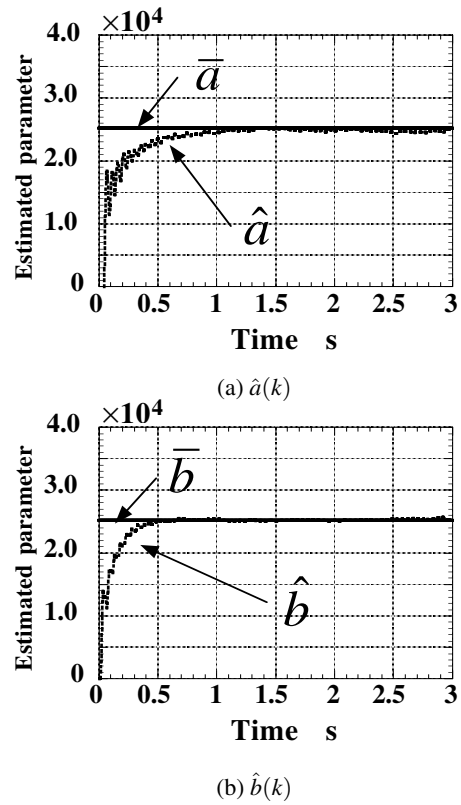


Fig. 7 Parameter estimation with disturbance observer

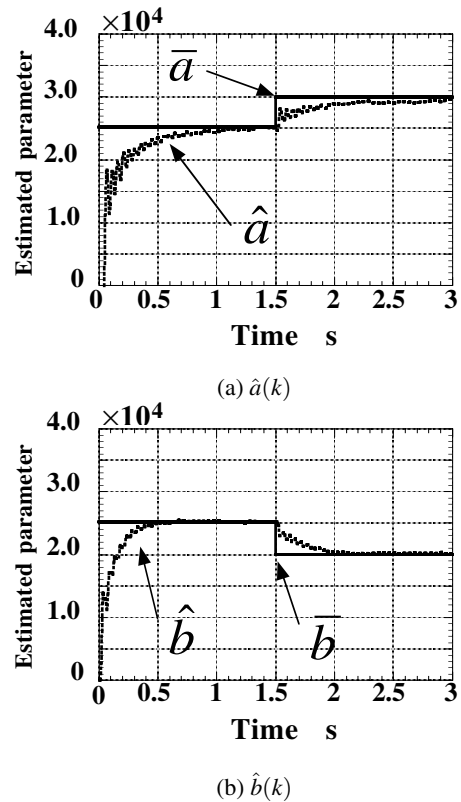


Fig. 8 Parameter estimation on the time-varying plant