曲線による微分形式の導入

Introduction of Differential Forms by Curves

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract : Differential forms are useful mathematical tools in physics and engineerings. Especially, first differential forms (total differentials) play an important role in deriving formulas in electro magnetics, elastic mechanics, fluid dynamics, thermo dynamics and so on. Moreover, differential forms often give simpler expressions for formulas expressed by vector fields, which lead to a deeper understanding of physical phenomena. In mathematics, however, the definition of differential forms is based on the concept of tangent vectors, which is rather abstract for students of engineering, while the tangent vector can be defined as a certain set of curves. The basic idea of this paper is to define differential forms directly by curves. This new definition is not only simpler than the usual one but also connected directly to geometrical images of differential forms.

Keywords : Differential form, Curve

1. はじめに

微分形式は，物理・工学において有用な数学概念である．特に 1 次微分形式（全微分）は，電磁気学，弾性体論，流体力学，熱力学などにおける公式を導く際に重要な役割を演じる．さらに，微分形式はベクトル場で表現された公式に簡潔な表現を与え，それが物理現象の深い理解に繋がることがしばしばある．しかし数学的には，微分形式の定義は接ベクトルの概念に基いており，工学系の学生にとっては抽象的過ぎる．一方，接ベクトルは曲線の集合として定義できる．本論文の基本方針は，曲線を用いて微分形式を直接定義しようというものである．この新しい定義は簡潔であるばかりでなく，微分形式の幾何的イメージに直結している．

2. 準備

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．任意の自然数 n に対し，

$$\mathbb{R}_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

とおき，これを n 次元実数空間とよぶ．任意の $a \in \mathbb{R}_n$ に対し，その第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を a_i で表す．すなわち，

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

東京都立産業技術高等専門学校　ものづくり工学科

が成り立つ．任意の集合 S から $\mathbb{R}_n$ への任意の写像 $f : S \to \mathbb{R}_n$ に対し，f の定義域 S を記号 $D(f)$ で表す．さらに，f の第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とよばれる関数 $f_i : S \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：任意の $P \in S$ に対し，

$$f_i(P) = f(P)_i$$

逆に，n 個の関数 $f_i : S \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し，写像 $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : S \to \mathbb{R}_n$ を次のように定義する：任意の $P \in S$ に対し，

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n)(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P))$$

従って，任意の写像 $f : S \to \mathbb{R}_n$ に対し，

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

が成り立つ．次に，任意の自然数 n に対し，

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \middle| \, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

とおき，これを n 次元実数ベクトル空間とよぶ．任意の $b \in \mathbb{R}^n$ に対し，その第 i 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を b_i で表す．すなわち，

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^n$ の要素は $\mathrm{n} \times 1$ 行列とみなすことにより，和，実数倍，行列による積が定義される．また，任意の $b \in \mathbb{R}^n$ のノルム $|b|$ を次の式で定義する．

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

さらに，任意の $a, p \in \mathbb{R}_n$ に対し，$\overrightarrow{ap} \in \mathbb{R}^n$ を次の式で定義する．

$$\overrightarrow{ap} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ p_n - a_n \end{pmatrix}$$

3. 微分

最初に「偏微分」を定義する．

［定義 3.1］ M を任意の集合とし，M の任意の部分集合 S_1, S_2 上の写像 $f : S_1 \to \mathbb{R}_m$, $\varphi : S_2 \to \mathbb{R}_n$ を考える．n 以下の自然数 i，$A \in S_1 \cap S_2$ に対し，$\varphi(P)$ と $\varphi(A)$ の i 番目以外の成分が等しいという条件の下での条件付き極限値

$$\lim_{\varphi(P) \to \varphi(A)} \frac{\overrightarrow{f(A)f(P)}}{\varphi_i(P) - \varphi_i(A)} \qquad (\forall j \neq i,\ \varphi_j(P) = \varphi_j(A))$$

が存在するとき，その値（$\mathbb{R}^m$ の要素）を $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i}(A)$ と書き，f の点 A における φ_i による偏微分係数（ベクトル）という．またこのとき，f は点 A において φ_i で偏微分可能であるという．f が φ_i

で偏微分可能な点の集合を S とするとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ は集合 S から $\mathbb{R}^m$ への写像とみなすことができる．この写像を f の φ_i による偏微分という．またこのとき，f は S において φ_i で偏微分可能であるという．

次に「微分」を定義する．

［定義 3.2］ M を任意の集合とし，M の任意の部分集合 S_1, S_2 上の写像 $f : S_1 \to \mathbb{R}_m, \varphi : S_2 \to \mathbb{R}_n$ を考える．$A \in S_1 \cap S_2$ に対し，m 行 n 列の実数行列 $\dfrac{df}{d\varphi}(A)$ で次の式を満たすものがただひとつ存在するとき，この行列 $\dfrac{df}{d\varphi}(A)$ を f の点 A における φ による微分係数（行列）という．

$$\lim_{\varphi(P)\to\varphi(A)} \left|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(P)}\right|^{-1} \left(\overrightarrow{f(A)f(P)} - \frac{df}{d\varphi}(A)\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(P)}\right) = 0$$

またこのとき，f は点 A において φ で微分可能であるという．f が φ で微分可能な点の集合を S とするとき，$\dfrac{df}{d\varphi}$ は集合 S から $\mathbb{R}^m_n$（m 行 n 列の実数行列全体の集合）への写像とみなすことができる．この写像を f の φ による微分という．またこのとき，f は S において φ で微分可能であるという．

f が点 A において φ で微分可能かつ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ で偏微分可能であるとき，次の式が成り立つ．

$$\frac{df}{d\varphi}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}(A) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n}(A) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}(A) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_n}(A) \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial \varphi_1}(A) & \frac{\partial f_m}{\partial \varphi_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \varphi_n}(A) \end{pmatrix}$$

さらに，次の定理（連鎖律）が証明される (証明略)．

［定理 3.3］ f, α が集合 M の部分集合から $\mathbb{R}_m$ への写像とする．点 $A \in D(f) \cap D(\alpha)$ に対し，点 A を含む M の部分集合から $\mathbb{R}_n$ への写像 φ で $\varphi(A)$ が $\varphi(D(f) \cap D(\varphi))$ の内点になっているものを考える．f が点 A において φ で微分可能，φ が点 A において α で微分可能であるとき，f は点 A において α で微分可能であり，次の式が成り立つ．

$$\frac{df}{d\alpha}(A) = \frac{df}{d\varphi}(A)\frac{d\varphi}{d\alpha}(A)$$

4. 微分構造

微分形式は，任意の微分多様体上で定義される．しかし，工学系の学生に対して微分多様体の定義をそのままの形で示すことは適当ではない．ここでは，一般位相の概念を用いない微分多様体（微分構造）の定義を述べるが，これも最初からこの形で学生に示すのではなく，物理空間におけるデカルト座標などを想定して議論を進め，必要に応じて以下の説明をするという方式が望ましい．

［定義 4.1］ 集合 M の部分集合から n 次元実数空間 $\mathbb{R}_n$ への単射（1 対 1 写像）からなる集合 $\Phi(M)$ が次の性質を満たすとき，$\Phi(M)$ を M の n 次元微分構造という．

(1) $M = \cup_{\varphi\in\Phi(M)} D(\varphi)$.

(2) 任意の $\varphi, \psi \in \Phi(M)$ に対し，$\varphi(D(\varphi) \cap D(\psi))$ は $\mathbb{R}_n$ の開集合である．

(3) 任意の $\varphi, \psi \in \Phi(M)$ に対し，ψ が $D(\varphi) \cap D(\psi)$ において $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ で何度でも偏微分可能である．

(4) M の部分集合から $\mathbb{R}_n$ への写像 φ で次の条件を満たすものは全て $\Phi(M)$ に含まれる：
任意の $\psi \in \Phi(M)$ に対し，$\varphi(D(\varphi) \cap D(\psi))$ および $\psi(D(\varphi) \cap D(\psi))$ は $\mathbb{R}_n$ の開集合であり，ψ が $D(\varphi) \cap D(\psi)$ において $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ で何度でも偏微分可能かつ，φ が $D(\varphi) \cap D(\psi)$ において $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ で何度でも偏微分可能である．

以下においては，集合 M に対してひとつの n 次元微分構造 $\Phi(M)$ が与えられているものとする．このとき，M を n 次元微分多様体，$\Phi(M)$ の要素を局所座標とよぶ．このとき，任意の $A \in M$ に対して次のようにおく．

$$\Phi_A(M) = \{\varphi \in \Phi(M) | A \in D(\varphi)\}$$

多様体においては，写像の写像による微分可能性とは別に，写像自身の「微分可能性」を定義することができる．

［定義 4.2］ M の部分集合 S から $\mathbb{R}_m$ への写像 f が $A \in S$ において微分可能であるとは，任意の $\varphi \in \Phi_A(M)$ に対し，f が A において φ で微分可能であることとする．f が S の任意の点において微分可能であるとき，f は微分可能であるという．

また，多様体の「開集合」を定義する．

［定義 4.3］ M の部分集合 U が開集合であるとは，任意の $\varphi \in \Phi(M)$ に対し，$\varphi(U \cap D(\varphi))$ が $\mathbb{R}_n$ の開集合であることとする．

5. 全微分

S を n 次元微分多様体 M の部分集合とする．まず，S 上に始点を持つ M 内の曲線の集合 $C(S)$ を定義する（$S = \{A\}$ の場合，$C(S)$ は $C(A)$ と略記される）．

［定義 5.1］ $C(S)$ は，M の部分集合から閉区間 $[0, 1]$ への全単射 α で，以下の条件を満たすもの全体の集合とする．

(1) $\alpha^{-1}(0) \in S$

(2) 任意の $\varphi \in \Phi_{\alpha^{-1}(0)}(M)$ に対し，φ は $\alpha^{-1}(0)$ において α で微分可能である．

ここで，(2) が成り立つためにはひとつの $\varphi \in \Phi_{\alpha^{-1}(0)}(M)$ に対し $\dfrac{d\varphi}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0))$ が存在すれば十分である．なぜなら，そのとき連鎖律（定理 3.3）より任意の $\psi \in \Phi_{\alpha^{-1}(0)}(M)$ に対し，$\dfrac{d\psi}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0)) = \dfrac{d\psi}{d\varphi}(\alpha^{-1}(0))\dfrac{d\varphi}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0))$ となるからである．次に，M の任意の開集合を U として「全微分」を定義する．

［定義 5.2］ U から $\mathbb{R}_m$ への微分可能写像 f に対し，$C(U)$ 上の写像 df を次のように定義し，f の全微分とよぶ：任意の $\alpha \in C(U)$ に対し，

$$df(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0)) = \lim_{\alpha(P) \to 0} \frac{\overrightarrow{f(\alpha^{-1}(0))f(P)}}{\alpha(P)}$$

この値が必ず存在することは，連鎖律（定理 3.3）から分かる．すなわち，$\varphi \in \Phi_{\alpha(0)}(M)$ をとると，$\dfrac{df}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0)) = \dfrac{df}{d\varphi}(\alpha^{-1}(0))\dfrac{d\varphi}{d\alpha}(\alpha^{-1}(0))$ となる．

ここで定義した全微分 df の幾何的意味を考察する．定義式より，$\alpha(E)$ が十分小さい正の数であるなら，

$$df(\alpha) \approx \frac{\overrightarrow{f(\alpha^{-1}(0))f(E)}}{\alpha(E)}$$

すなわち，

$$\alpha(E)df(\alpha) \approx \overrightarrow{f(\alpha^{-1}(0))f(E)} \qquad (*)$$

となる．ここで，$\alpha_E : \alpha^{-1}([0,\alpha(E)]) \to [0,1]$ を次のように定義する：任意の $P \in \alpha^{-1}([0,\alpha(E)])$ に対し，

$$\alpha_E(P) = \frac{\alpha(P)}{\alpha(E)}$$

このとき，

$$\begin{aligned} df(\alpha_E) &= \lim_{\alpha_E(P)\to 0} \frac{\overrightarrow{f(\alpha_E^{-1}(0))f(P)}}{\alpha_E(P)} \\ &= \lim_{\alpha(P)\to 0} \alpha(E)\frac{\overrightarrow{f(\alpha^{-1}(0))f(P)}}{\alpha(P)} = \alpha(E)df(\alpha) \end{aligned}$$

これと α_E の定義によって $(*)$ を書き変えると，

$$df(\alpha_E) \approx \overrightarrow{f(\alpha_E^{-1}(0))f(\alpha_E^{-1}(1))}$$

すなわち,「十分小さい」曲線 α_E に関しては，$df(\alpha_E)$ は α_E の始点での f の値に対する α_E の終点での f の値の増分を表す．したがって，例えば M が物理空間である場合にはその図の中に微小な矢印 α を記入し，その終点と始点における f の値の差を $df(\alpha)$ とすることができる．

S_1, S_2 を M の任意の部分集合とする．$C(S_1)$ 上の関数 ω と $C(S_2)$ 上の関数 η に対し，$C(S_1 \cap S_2)$ 上の関数 $\omega + \eta$ を次のように定義する：任意の $\alpha \in C(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(\omega + \eta)(\alpha) = \omega(\alpha) + \eta(\alpha)$$

また，$C(S_1)$ 上の関数 ω と S_2 上の関数 f に対し，$C(S_1 \cap S_2)$ 上の関数 $f\omega$ を次のように定義する：任意の $\alpha \in C(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(f\omega)(\alpha) = f(\alpha^{-1}(0))\omega(\alpha)$$

このとき，次の定理が成り立つ．

［定理 5.3］ U から $\mathbb{R}_m$ への微分可能写像 f，$A \in U$，$\varphi \in \Phi_A(M)$，$\alpha \in C(A)$ に対し，

$$df(\alpha) = \frac{df}{d\varphi}(A)d\varphi(\alpha)$$

［証明］ $df(\alpha) = \dfrac{df}{d\alpha}(A) = \dfrac{df}{d\varphi}(A)\dfrac{d\varphi}{d\alpha}(A) = \dfrac{df}{d\varphi}(A)d\varphi(\alpha)$

［系 5.4］ U から $\mathbb{R}_m$ への微分可能写像 f，$\varphi \in \Phi(M)$ に対し，

$$df|_{C(U\cap D(\varphi))} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}d\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_n}d\varphi_n$$

6. 微分形式

全微分 df は「1 次微分形式」というものにもなっている．S を n 次元微分多様体 M の部分集合とし，n 以下の自然数 r に対し，

$$C_r(S) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) |\, A \in S,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in C(A)\}$$

とおくと，微分形式の定義は次のように述べることができる．

［定義 6.1］ $C_r(S)$ 上の関数 ω が以下の条件を満たすとき，ω を S 上の r 次微分形式という：任意の $A \in S$，任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in C(A)$，$r$ 以下の任意の異なる自然数 i に対し，

(1) ひとつの（従って全ての）$\varphi \in \Phi_A(M)$ について $d\varphi(\alpha_i) = cd\varphi(\beta)$ が成り立つような任意の $c \in \mathbb{R}$ と任意の $\beta \in C(A)$ をとると，

$$\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r) = c\omega(\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r)$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたものを表す．

(2) ひとつの（従って全ての）$\varphi \in \Phi_A(M)$ について $d\varphi(\alpha_i) = d\varphi(\beta) + d\varphi(\gamma)$ が成り立つような任意の $\beta, \gamma \in C(A)$ をとると，

$$\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r) = \omega(\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r) + \omega(\alpha_1, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_r)$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたもの，
$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたものを表す．

(3) j を i と異なる r 以下の任意の自然数とするとき，

$$\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_r) = -\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r)$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i と α_j を交換したものを表す．

また，S 上の関数自体は 0 次微分形式とみなす．

［定理 6.2］ M の開集合 U 上の微分可能関数 f に対し，df は U 上の 1 次微分形式である．

［証明］ 任意の $A \in U$，任意の $\alpha \in C(A)$，任意の $\varphi \in \Phi_A(M)$ に対し，

$$df(\alpha) = \frac{df}{d\varphi}(A) d\varphi(\alpha)$$

であること（定理 5.3）を用いて，微分形式の条件を確認することができる．

S_1, S_2 を M の任意の部分集合とする．S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上の r 次微分形式 η に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の r 次微分形式 $\omega + \eta$ を次のように定義する：任意の $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in C_r(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$(\omega + \eta)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) + \eta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

また，S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上関数 f に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の r 次微分形式 $f\omega$ を次のように定義する：任意の $A \in S_1 \cap S_2$，任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in C(A)$ に対し，

$$(f\omega)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = f(A)\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

7. 外積と局所表示

微分形式同士の積（外積）を定義する．

［定義 7.1］ S_1, S_2 を n 次元微分多様体 M の部分集合とする．S_1 上の r 次微分形式 ω と S_2 上の s 次微分形式 η に対し，$S_1 \cap S_2$ 上の $r+s$ 次微分形式 $\omega\eta$ を次のように定義する：任意の $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+s}) \in C_{r+s}(S_1 \cap S_2)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&(\omega\eta)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
&= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} (\mathrm{sgn}\sigma)\omega(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)})\eta(\alpha_{\sigma(r+1)}, \alpha_{\sigma(r+2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)})
\end{aligned}
$$

ただし，σ は $\{1, 2, \ldots, r+s\}$ の置換，$\mathrm{sgn}\sigma$ はその符号を表す．この $\omega\eta$ を ω と η の「外積」という．

具体例として，$r = s = 1$ の場合は，

$$(\omega\eta)(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2}[\omega(\alpha_1)\eta(\alpha_2) - \omega(\alpha_2)\eta(\alpha_1)]$$

$r = 1, s = 2$ の場合は，

$$(\omega\eta)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{3}[\omega(\alpha_1)\eta(\alpha_2, \alpha_3) + \omega(\alpha_2)\eta(\alpha_3, \alpha_1) + \omega(\alpha_3)\eta(\alpha_1, \alpha_2)]$$

定義より，$\omega\eta = (-1)^{r+s}\eta\omega$．特に r が奇数の場合，$\omega\omega = -\omega\omega$ なので $\omega\omega = 0$ となる．

任意の $A \in M$，任意の $\varphi \in \Phi_A(M)$，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，次を満たす曲線 $c_i(\varphi)_A \in C(A)$ をとる：A を含む開集合から $\mathbb{R}_m$ への任意の写像 f に対し，

$$df(c_i(\varphi)_A) = \frac{df}{dc_i(\varphi)_A}(A) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(A)$$

S 上の r 次微分形式 ω と局所座標 φ，n 以下の自然数 $i(1), i(2), \ldots, i(r)$ に対し，$C_r(S \cap D(\varphi))$ 上の関数 $\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}$ を次のように定義する：任意の $A \in S \cap D(\varphi)$ に対し，

$$\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A) = \omega(c_{i(1)}(\varphi)_A, c_{i(2)}(\varphi)_A, \ldots, c_{i(r)}(\varphi)_A)$$

微分形式は次のように局所表示される．

［定理 7.2］ S 上の r 次微分形式 ω と $\varphi \in \Phi(M)$ に対し，

$$\omega|_{C_r(S \cap D(\varphi))} = \sum_i \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

ただし，i は $\{1, 2, \ldots, r\}$ から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全ての写像を動く．

［証明］ 任意の点 $A \in S \cap D(\varphi)$，任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in C(A)$，$k = 1, 2, \ldots, r$ に対し，

$$
\begin{aligned}
d\varphi(\alpha_k) &= \sum_{i(k)=1}^{n} d\varphi(\alpha_k)_{i(k)} E_{i(k)} \qquad (E_{i(k)} \text{ は } n \text{ 次単位行列 } E \text{ の第 } i(k) \text{ 列ベクトル}) \\
&= \sum_{i(k)=1}^{n} d\varphi_{i(k)}(\alpha_k) \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{i(k)}}(A) = \sum_{i(k)=1}^{n} d\varphi_{i(k)}(\alpha_k) d\varphi(c_{i(k)}(\varphi)_A)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
&\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \\
&= \sum_i d\varphi_{i(1)}(\alpha_1) \cdots d\varphi_{i(r)}(\alpha_r) \omega(c_{i(1)}(\varphi)_A, \ldots, c_{i(r)}(\varphi)_A)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_i \sum_\sigma \frac{1}{r!} d\varphi_{i(\sigma(1))}(\alpha_1) \cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(\alpha_r) \omega(c_{i(\sigma(1))}(\varphi)_A, \ldots, c_{i(\sigma(r))}(\varphi)_A)$$

$$= \sum_i \sum_\sigma \frac{1}{r!} (\mathrm{sgn}\sigma) d\varphi_{i(\sigma(1))}(\alpha_1) \cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(\alpha_r) \omega(c_{i(1)}(\varphi)_A, \ldots, c_{i(r)}(\varphi)_A)$$

$$= \sum_i \sum_\sigma \frac{1}{r!} (\mathrm{sgn}\sigma) d\varphi_{i(\sigma(1))}(\alpha_1) \cdots d\varphi_{i(\sigma(r))}(\alpha_r) \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A)$$

ここで，置換 σ の逆置換 τ を考えると，

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

$$= \sum_i \sum_\tau \frac{1}{r!} (\mathrm{sgn}\tau) d\varphi_{i(1)}(\alpha_{\tau(1)}) d\varphi_{i(2)}(\alpha_{\tau(2)}) \cdots d\varphi_{i(r)}(\alpha_{\tau(r)}) \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A)$$

$$= \sum_i (d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)})(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}(A)$$

$$= \left(\textstyle\sum_i \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}\right)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

これが任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ について成り立つので，

$$\omega|_{C_r(S \cap D(\varphi))} = \sum_i \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

8. 外微分

U を n 次元微分多様体 M の開集合とし，U 上の r 次微分形式 ω を考える．任意の $\varphi \in \Phi(M)$ と任意の $i : \{1, 2, \ldots, r\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$U \cap D(\varphi)$ 上の関数 $\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}$ が微分可能であるとき，ω は微分可能であるという．本章では，U 上の微分可能な r 次微分形式 ω に対して，ω の「外微分」と呼ばれる $n+1$ 次微分形式を定義する．そのためにまずひとつの $\varphi \in \Phi(M)$ を固定し，$D(\varphi)$ の部分集合 U 上の微分形式の外微分を φ に依存して定義する．

［定義 8.1］ U 上の r 次微分形式 ω が微分可能であるとき，S 上の $r+1$ 次微分形式 $d\omega$ を次のように定義する：

$$d\omega = \sum_i d[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}] d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

ただし，0 次微分形式，すなわち関数 f に対しては，df は全微分に一致するものとする．

以下，この φ に依存した外微分の性質を述べる．まず定義より，U 上の微分可能 r 次微分形式 ω, η に対し，$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.

［定理 8.2］ U_1, U_2 を $D(\varphi)$ の開集合とする．U_1 上の r 次微分形式 ω と，U_2 上の s 次微分形式 η が共に微分可能であるとき，

$$d(\omega\eta) = (d\omega)\eta + (-1)^r \omega d\eta$$

［証明］ ω, η を φ で表示すると，

$$\omega = \sum_i \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)} d\varphi_{i(1)} d\varphi_{i(2)} \cdots d\varphi_{i(r)}$$

$$\eta = \sum_j \eta(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(s)} d\varphi_{j(1)} d\varphi_{j(2)} \cdots d\varphi_{j(s)}$$

両辺外積をとると，

$$\omega\eta=\sum_i\sum_j \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}\eta(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(s)}d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}$$

外微分して，

$$\begin{aligned}
&d(\omega\eta)\\
&=\sum_i\sum_j d[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}\eta(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(s)}]d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}\\
&=\sum_i\sum_j (d[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]\eta(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(s)}d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}\\
&\qquad\qquad +\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}d[\eta(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(s)}]d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)})\\
&=\sum_i\sum_j (d[\omega(\varphi)_{i(1)\cdots i(r)}]d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}\eta(\varphi)_{i(1)\cdots i(s)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}\\
&\qquad\qquad +(-1)^r\omega(\varphi)_{i(1)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}d[\eta(\varphi)_{i(1)\cdots i(s)}]d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)})\\
&=\sum_i d[\omega(\varphi)_{i(1)\cdots i(r)}]d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}\sum_j \eta(\varphi)_{i(1)\cdots i(s)}d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}\\
&\qquad\qquad +(-1)^r\sum_i \omega(\varphi)_{i(1)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}\cdots d\varphi_{i(r)}\sum_j d[\eta(\varphi)_{i(1)\cdots i(s)}]d\varphi_{j(1)}\cdots d\varphi_{j(s)}
\end{aligned}$$

U 上の r 次微分形式 ω と任意の $i:\{1,2,\ldots,r\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ に対し，U 上の関数 $\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}$ の $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ による 2 回偏微分が存在して連続であるとき，ω は 2 回連続微分可能であるという．

［定理 8.3］ U 上の r 次微分形式 ω が 2 回連続微分可能であるとき，

$$dd\omega=0$$

［証明］ ω を φ で表示すると，

$$\omega=\sum_i \omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}$$

外微分すると，

$$\begin{aligned}
d\omega&=\sum_i d[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}\\
&=\sum_i\sum_{p=1}^n \frac{\partial[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_p}d\varphi_p d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}
\end{aligned}$$

再度外微分して，

$$\begin{aligned}
dd\omega&=\sum_i\sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k}d\varphi_k d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}\\
&=\sum_i\sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k}d\varphi_k d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}\\
&=\sum_i\sum_{k=1}^n d\frac{\partial[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k}d\varphi_k d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}\\
&=\sum_i\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}
\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k \\
&=\sum_{k<l}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k+\sum_{a>b}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k \\
&=\sum_{k<l}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k+\sum_{l>k}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k\partial\varphi_l}d\varphi_k d\varphi_l \\
&=\sum_{k<l}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}d\varphi_l d\varphi_k-\sum_{k<l}\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k\partial\varphi_l}d\varphi_l d\varphi_k \\
&=\sum_{k<l}\left(\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_l\partial\varphi_k}-\frac{\partial^2[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]}{\partial\varphi_k\partial\varphi_l}\right)d\varphi_l d\varphi_k \\
&=0
\end{aligned}
$$

以後，各 φ に依存して定まる外微分作用素を d_φ と書く．以上の性質を用いて，M の任意の開集合 U 上の微分形式に対する一般の外微分を定義する．

［定義 8.4］ U 上の r 次微分形式 ω が微分可能であるとき，U 上の $r+1$ 次微分形式 $d\omega$ を次のように定義する：任意の $A\in U$，任意の $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\in C(A)$，任意の $\varphi\in\Phi_A(M)$ に対し，

$$d\omega(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1})=d_\varphi(\omega|_{C_r(U\cap D(\varphi))})(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1})$$

ここで，右辺の値が $\varphi\in\Phi_A(M)$ の選び方によらないことを示す．任意の $\varphi,\psi\in\Phi_A(M)$ に対し $D(x)\subseteq D(\varphi)\cap D(\psi)$ となる $x\in\Phi_A(M)$ をとる．U 上の微分可能 r 次微分形式 ω に対し，

$$\omega|_{C_r(U\cap D(\varphi))}=\sum_i\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}d\varphi_{i(2)}\cdots d\varphi_{i(r)}$$

なので，これをさらに制限すると，

$$\omega|_{C_r(U\cap D(x))}=\sum_i\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}d\varphi_{i(1)}|_{D(x)}\cdots d\varphi_{i(r)}|_{D(x)}$$

これを d_x で外微分すると，

$$
\begin{aligned}
&d_x(\omega|_{C_r(U\cap D(x))})=\sum_i d[\omega(\varphi)_{i(1)i(2)\cdots i(r)}]d\varphi_{i(1)}|_{D(x)}\cdots d\varphi_{i(r)}|_{D(x)} \\
&=d_\varphi(\omega|_{C_r(U\cap D(\varphi))})|_{C_{r+1}(U\cap D(x))}
\end{aligned}
$$

同様に $d_x(\omega|_{C_r(U\cap D(x))})=d_\psi(\omega|_{C_r(U\cap D(\psi))})|_{C_{r+1}(U\cap D(x))}$ が成り立つので，任意の $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\in C(A)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&d_\varphi(\omega|_{C_r(U\cap D(\varphi))})(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1})=d_x(\omega|_{C_{r+1}(U\cap D(x))})(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}) \\
&=d_\varphi(\omega|_{C_{r+1}(U\cap D(\varphi))})(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1})
\end{aligned}
$$

また，この定義によって外積の外微分の公式（定理 8.2），2 回外微分の公式（定理 8.3）は一般の外微分に受け継がれる．

［例 8.5］ 3 次元微分多様体 M の部分集合 S 上の微分可能関数 f,g,h と局所座標 (x,y,z) でつくられる 2 次微分形式

$$\omega = fdydz + gdzdx + hdxdy$$

の外微分を計算すると，

$$\begin{aligned}
&d\omega = d(fdydz) + d(gdzdx) + d(hdxdy) \\
&= df dydz + dgdzdx + dhdxdy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) dydz + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) dzdx \\
&\quad + \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right) dxdy \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial g}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial h}{\partial z}dzdxdy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dxdydz
\end{aligned}$$

9. ベクトル場と微分形式

以下では，応用上重要な多様体であるユークリッド空間を扱う．

［定義 9.1］ E を集合，$\mathbb{V}(E)$ を，内積・を持つ n 次元実ベクトル空間とする．集合 E の任意の 2 点 P, Q に対して $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}(E)$ が定められていて次の条件を満たすとき，E を n 次元ユークリッド空間という：

(1) 任意の $P, Q, R \in E$ に対し，$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

(2) 任意の $P \in E$，任意の $v \in V$ に対し，$\overrightarrow{PQ} = v$ となる点 $Q \in E$ がただひとつ存在する

E を n 次元ユークリッド空間とする．点 $O \in E$ と $\mathbb{V}(E)$ の正規直交基底 $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ を固定し，E から $\mathbb{R}_n$ への写像 φ を次のように定義する：任意の $P \in E$ に対し，

$$\varphi(P) = \left(\overrightarrow{OP} \cdot e_1, \overrightarrow{OP} \cdot e_2, \ldots, \overrightarrow{OP} \cdot e_n\right)$$

これより，任意の点 $P, Q \in E$ に対し次が成り立つ．

$$\overrightarrow{PQ} = (\varphi_1(Q) - \varphi_1(P))e_1 + (\varphi_2(Q) - \varphi_2(P))e_2 + \cdots + (\varphi_n(Q) - \varphi_n(P))e_n$$

この φ をひとつの局所座標とすることにより E の微分構造 $\Phi(E)$ を定め，E を n 次元微分多様体と見なす．E の部分集合 S 上の r 次微分形式から S 上の $n-r$ 次微分形式への線形作用素 $*$ を次のように定義する：$\{1, 2, \ldots, n)$ の任意の置換 σ に対し，

$$*(d\varphi_{\sigma(1)}d\varphi_{\sigma(2)}\cdots d\varphi_{\sigma(r)})|_{C_r(S)} = (\mathrm{sgn}\sigma)(d\varphi_{\sigma(r+1)}d\varphi_{\sigma(r+2)}\cdots d\varphi_{\sigma(n)})|_{C_{n-r}(S)}$$

この $*$ は Hodge のスター作用素とよばれ，向き付けられたリーマン多様体に対して座標によらない定義を与えることもできる．また，曲線 $\alpha \in C(E)$ に対し，$\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{V}(E)$ を次の式で定義する：

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\alpha} = \lim_{\alpha(P)\to 0} \frac{\overrightarrow{\alpha^{-1}(0)P}}{\alpha(P)} \\
&= \lim_{\alpha(P)\to 0} \frac{(\varphi_1(P) - \varphi_1(\alpha^{-1}(0)))e_1 + (\varphi_2(P) - \varphi_2(\alpha^{-1}(0)))e_2 + \cdots + (\varphi_n(P) - \varphi_n(\alpha^{-1}(0)))e_3}{\alpha(P)} \\
&= d\varphi_1(\alpha)e_1 + d\varphi_2(\alpha)e_2 + d\varphi_3(\alpha)e_3
\end{aligned}$$

すなわち，$\overrightarrow{\alpha}$ は $\alpha^{-1}(0)$ において曲線 α に接するベクトルである．

S を E の部分集合とする．任意の $A \in S$ に対し $X_A \in \mathbb{V}(E)$ を対応させる写像 X を S 上のベクトル場という．S 上の任意の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ に対し，

$$f_1e_1 + f_2e_2 + \cdots + f_ne_n$$

で表されるベクトル場，すなわち任意の $A \in S$ に対し

$$f_1(A)e_1 + f_2(A)e_2 + \cdots + f_n(A)e_n$$

を対応させるベクトル場と，S 上の 1 次微分形式

$$f_1d\varphi_1 + f_2d\varphi_2 + \cdots + f_nd\varphi_n$$

を同一視する．すなわち，ベクトル場 X を 1 次微分形式と見た場合には，任意の $A \in S$，任意の $\alpha \in C(A)$ に対し，

$$X(\alpha) = ((X \cdot e_1)d\varphi_1 + (X \cdot e_2)d\varphi_2 + \cdots + (X \cdot e_n)d\varphi_n)(\alpha)$$
$$= X_A \cdot (d\varphi_1(\alpha)e_1 + d\varphi_1(\alpha)e_1 + \cdots + d\varphi_n(\alpha)e_n) = X_A \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

以降，$n = 3$ とする．E の開集合 U 上の微分可能関数 f に対し，

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}e_1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}e_2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}e_3 = \mathrm{grad}f$$

U 上の微分可能ベクトル場 $X = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$（$X_1, X_2, X_3 : U$ 上の関数）に対し，

$$*d*X = \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_3} = \mathrm{div}X$$

$$*dX = \left(\frac{\partial X_3}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_3}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi_3} - \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_1}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_2}\right)d\varphi_3 = \mathrm{rot}X$$

U 上の 1 次微分形式 ω，η に対し，

$$*(\omega\eta) = \omega \times \eta$$

U 上の 1 次微分形式 ω，2 次微分形式 η に対し，

$$*(\omega\eta) = \omega \cdot *\eta$$

以上により，ベクトル解析における種々の恒等式を導くことができる．例えば，U 上の微分可能関数 f，微分可能ベクトル場 X に対し，

$$\mathrm{div}(fX) = *d*(fX) = *d(f*X) = *[(df)*X + fd*X]$$
$$= (df) \cdot X + f*d*X = (\mathrm{grad}f) \cdot X + f\mathrm{div}X$$
$$\mathrm{rot}(fX) = *d(fX) = *[(df)X + fdX]$$
$$= (df) \times X + f*dX = (\mathrm{grad}f) \times X + f(\mathrm{rot}X)$$

U 上の 2 回連続微分可能関数 f，2 回連続微分可能ベクトル場 X に対し，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = *ddf = 0$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}X) = *d**dX = *ddX = 0$$

V を E 内の 3 次元領域とする．V 上の 3 次微分形式 dV を次のように定義する：任意の $A \in V$，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in C(A)$ に対し，

$$dV(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \cdot \overrightarrow{\gamma}$$

この dV を領域 V の体積要素という．

［定理 9.2］ V を定義域に含む関数 f に対し，

$$fdV = *f|_{C_3(V)} \qquad （特に，dV = *1 = d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3）$$

［証明］ 任意の $A \in V$，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in C(A)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&(fdV)(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{6}f(A)(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \cdot \overrightarrow{\gamma} \\
&= \frac{1}{6}f(A)[(d\varphi_2(\alpha)d\varphi_3(\beta) - d\varphi_3(\alpha)d\varphi_2(\beta))e_1 \\
&\qquad +(d\varphi_3(\alpha)d\varphi_1(\beta) - d\varphi_1(\alpha)d\varphi_3(\beta))e_2 \\
&\qquad +(d\varphi_1(\alpha)d\varphi_2(\beta) - d\varphi_2(\alpha)d\varphi_1(\beta))e_3] \cdot \overrightarrow{\gamma} \\
&= \frac{1}{6}f(A)[(d\varphi_2(\alpha)d\varphi_3(\beta) - d\varphi_3(\alpha)d\varphi_2(\beta))d\varphi_1(\gamma) \\
&\qquad +(d\varphi_3(\alpha)d\varphi_1(\beta) - d\varphi_1(\alpha)d\varphi_3(\beta))d\varphi_2(\gamma) \\
&\qquad +(d\varphi_1(\alpha)d\varphi_2(\beta) - d\varphi_2(\alpha)d\varphi_1(\beta))d\varphi_3(\gamma)] \\
&= f(A)(d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3)(\alpha,\beta,\gamma) \\
&= (*f)(\alpha,\beta,\gamma)
\end{aligned}$$

故に， $fdV = *f|_{C_3(V)}$

S を E 内の滑らかな曲面とし，n をその単位法線ベクトル場とする．S 上の 2 次微分形式 dS を次のように定義する：任意の $A \in S$ と任意の $\alpha, \beta \in C(A)$ に対し，

$$dS(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \cdot n_A$$

この dS を曲面 S の面積要素という．

［定理 9.3］ S 上のベクトル場 X, $A \in S$, S 内の $\alpha, \beta \in C(A)$ に対し，

$$(X \cdot ndS)(\alpha,\beta) = (*X)(\alpha,\beta)$$

［証明］ $X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$（$X_1, X_2, X_3$: S 上の関数）とおくと，

$$*X = X_1 d\varphi_2 d\varphi_3 + X_2 d\varphi_3 d\varphi_1 + X_3 d\varphi_1 d\varphi_2$$

なので，

$$\begin{aligned}
&(*X)(\alpha,\beta) \\
&= X_1(A)\frac{1}{2}(d\varphi_2(\alpha)d\varphi_3(\beta) - d\varphi_2(\beta)d\varphi_3(\alpha)) \\
&\qquad +X_2(A)\frac{1}{2}(d\varphi_3(\alpha)d\varphi_1(\beta) - d\varphi_1(\beta)d\varphi_3(\alpha)) \\
&\qquad\quad +X_3(A)\frac{1}{2}(d\varphi_1(\alpha)d\varphi_2(\beta) - d\varphi_2(\beta)d\varphi_1(\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}X_A \cdot (\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \\
&= (X_A \cdot n_A)\frac{1}{2}(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \cdot n_A \\
&= (X \cdot ndS)(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

c を E 内の滑らかな曲線とし，t を $D(c)$ 上の単位接ベクトル場とする．$D(c)$ 上の 1 次微分形式 ds を次のように定義する：任意の $A \in D(c)$ と任意の $\alpha \in C(A)$ に対し，

$$ds(\alpha) = \overrightarrow{\alpha} \cdot t_A$$

この ds を曲線 c の線素という．

［定理 9.4］ $D(c)$ 上のベクトル場 X, $A \in D(c)$, c に沿う $\alpha \in C(A)$ に対し，

$$(X \cdot tds)(\alpha) = X(\alpha)$$

［証明］ $(X \cdot tds)(\alpha) = X_A \cdot t_A(\overrightarrow{\alpha} \cdot t_A) = X_A \cdot \overrightarrow{\alpha} = X(\alpha)$

以上の結果を用いて，積分定理と呼ばれる二つの公式

$$\int_{\partial V} X \cdot ndS = \int_V (\mathrm{div}X)dV \quad (\text{Gauss}) \qquad \int_{\partial S} X \cdot tds = \int_S (\mathrm{rot}X) \cdot ndS \quad (\text{Stokes})$$

を書き換えると，それぞれ，

$$\int_{\partial V} *X = \int_V *(*d*X) = \int_V d*X \qquad \int_{\partial S} X = \int_S *(*dX) = \int_S dX$$

となる．よってこれらの公式は次の形に一般化される．

［定理 9.5］ 向き付けられた n 次元微分多様体 M 上の連続微分可能な $n-1$ 次微分形式 ω がコンパクトな台を持つとき，M の正則境界領域 D とその境界 ∂D に関して次が成り立つ．

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

10. テンソル場

微分形式の拡張概念であるテンソル場を定義する．S を n 次元微分多様体 M の部分集合とする．任意の $A \in M$ に対し，$\{A\}$ 上の 1 次微分形式全体の集合を $F(A)$ で表す．0 以上の整数 r, s に対し，

$$C_rF_s(S) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) |\, A \in S,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in C(A),\, \omega_1, \ldots, \omega_s \in F(A)\}$$

とおく．

［定義 10.1］ $C_rF_s(S)$ 上の関数 T が以下の条件を満たすとき，T を S 上の (r, s) テンソルという：任意の $A \in S$，任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in C(A)$，任意の $\omega_1, \ldots, \omega_s \in F(A)$，$r$ 以下の任意の異なる自然数 i，s 以下の任意の異なる自然数 j に対し，

(1) ひとつの（従って全ての）$\varphi \in \Phi_A(M)$ について $d\varphi(\alpha_i) = cd\varphi(\beta)$ が成り立つような任意の $c \in \mathbb{R}$ と任意の $\beta \in C(A)$ をとると，

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) = cT(\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s)$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたものを表す．

(2) ひとつの（従って全ての）$\varphi \in \Phi_A(M)$ について $d\varphi(\alpha_i) = d\varphi(\beta) + d\varphi(\gamma)$ が成り立つような任意の $\beta, \gamma \in C(A)$ をとると，

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s)$$
$$= T(\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) + T(\alpha_1, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_s)$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたもの，
$\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$ の α_i を β で置き換えたものを表す．

(3) 任意の $c \in \mathbb{R}$ をとると，

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, c\omega_j, \ldots, \omega_s) = cT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_s)$$

ただし $\omega_1, \ldots, c\omega_j, \ldots, \omega_s$ は $\omega_1, \ldots, c\omega_j, \ldots, \omega_s$ の ω_j を $c\omega_j$ で置き換えたもおのを表す.

(4) 任意の $\eta \in F(A)$ をとると，

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_j + \eta, \ldots, \omega_s)$$
$$= T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_s) + T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \omega_1, \ldots, \eta, \ldots, \omega_s)$$

ただし，$\omega_1, \ldots, \omega_j + \eta, \ldots, \omega_s$ は $\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_s$ の ω_j を $\omega_j + \eta$ で置き換えたもの，$\omega_1, \ldots, \eta, \ldots, \omega_s$ は $\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_s$ の ω_j を η で置き換えたものを表す.

工学においては，テンソルは成分で扱われることが多い．S 上の (r, s) テンソル T，任意の $A \in S$，任意の $\varphi \in \Phi_A(M)$，任意の n 以下の自然数 $i(1), \ldots, i(r), j(1), \ldots, j(s)$ に対し，

$$T(A, \varphi)^{j(1)\cdots j(s)}_{i(1)\cdots i(r)} = T(c_{i(1)}(\varphi)_A, \ldots, c_{i(r)}(\varphi)_A, d\varphi_{j(1)}|_{C(A)}, \ldots, A\varphi_{j(s)}|_{C(A)})$$

とおき，T の A における φ に関する成分という．また，各 (A, φ) にこの値を対応させる関数を $T^{j(1)\cdots j(s)}_{i(1)\cdots i(r)}$ で表し，成分関数という．工学では主にこの成分関数に関する方程式によって，テンソル間の関係を表現する.

11. おわりに

微分形式は電磁気学などに活用され，テンソル場は弾性体論などに活用される．これらの概念を拡張した「ファイバーバンドルの切断」と呼ばれる概念はゲージ理論などに活用される．これらは全て，全微分 df の概念の発展形と見ることもできる．曲線に作用する関数として df を定義する本手法は，微分に関連した様々な概念の直観的理解に繋がると期待される.

12. 参考文献

[1] 松島与三：多様体入門，裳華房，1965.

[2] 村上信吾：多様体，共立出版，1969.

[3] 杉浦光夫：解析入門 I，東京大学出版会，1980.

[4] 中西泰雄：ユークリッド空間における解析の基礎，日本数学教育学会高専部会研究論文誌，VOL.4，NO.1，1997.

[5] 中西泰雄：座標を持つ集合上の微分法の導入について，東京都立工業高等専門学校研究報告，第 40 号，2005.

[6] 中西泰雄：座標を持つ集合上の differential の導入法，東京都立産業技術高等専門学校研究紀要，第 2 号，2008.