発見タブローによる証明計画

Planning of Proof by Heuristic Tableau

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract : In a heuristic process of proof in mathematics, we try not only forward derivations from the assumptions such as ‘from A, we get B’ but also backward derivations from the conclusion such as ‘in order to get C, we need D’. Thus, we have to discover all the statements which connect assumptions with the conclusion, to complete the planning of the proof. We define ‘heuristic tableau’ as a tableau which consists of those statements aranged in the order of discovery with symbols which express the logical relations of those statements. We suggest a planning method of proofs by using heuristic tableaus. For a concrete explanation, we use the first order NK system of Gentzen to explain our method. Our method gives an algorithm to prove arbitrary tautologies of the first order NK system, and is also valid for practical mathematics which is not necessarily formalized in symbolic logic.

Keywords : Proof, Heuristic Tableau, NK

1. はじめに

数学の証明の発見過程において，我々は仮定からの前進的推論とともに結論からの後退的推論を試みる．すなわち，証明においては「A から B が導かれる」,「A と B から C が導かれる」といった前進的推論のみが用いられるのに対し，証明発見過程においては「C を導くためには D を導けばよい」といった後退的推論が併用される．その結果，完成された証明における命題の導出順序は，それらが発見される順序とは通常大きく異なる．証明計画を完成するためには，仮定と結論をつなぐ全ての命題を見つけなければならないが，それらを発見の順序に並べ，かつそれらの論理的関係を示す記号を付加した図式を，発見タブロー（heuristic tableau）と呼ぶことにする．この論文では，ある発見タブローの書式と，それを用いた証明計画法を提案する．説明に当たっては，議論を具体化するため Gentzen による１階述語論理の自然演繹体系 NK を用いる．本方法は，NK に対しては任意のトートロジーを証明するアルゴリズムを与えるが，必ずしも記号論理で定式化されていない実際の数学に対しても，証明計画を支援する手法として用いることができる．

筆者は [1] において,「シーケント」を用いた証明計画図を提案した．シーケントによる証明計画図は，各シーケントの持つ情報量が多いために理論的には大変扱い易い反面，これを具体的な証明問題に適用した場合，各シーケント毎に全ての仮定と結論を繰り返し記入しなければならな

都立産業技術高専　ものづくり工学科

いことから多大な手間を要する．これに対し発見タブローは，シーケントではなく論理式の系列からなり，一旦記述した仮定や結論を繰り返し記入する必要はないため，シーケントによる証明計画図と同等の機能を持ちながらも，記述する式の数が格段に少ないという点で実用的である．

2. 自然演繹体系

本稿では，１階述語論理の自然演繹体系 NK によって議論を進める．論理記号としては $\to$，$\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\forall$，$\exists$ を用いる．意味論的には, 順に「ならば」,「かつ」,「または」,「でない」,「任意の」,「存在する」に対応する．体系 NK の詳細な説明は参考文献にゆずり，以下にその推論規則を示す．

論理記号 $\to$ に関する規則は次の２つである．

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

左の規則は，A と $A \to B$ から B を結論することを表しており，前提における $\to$ 記号が結論にないことから（$\to$ 除去）の規則と呼ばれる．右の規則は，仮定 A の下で B が導かれることから $A \to B$ を結論することを表しており,（$\to$ 導入）の規則と呼ばれる.（$\to$ 導入）の規則を用いる際は，具体的には仮定 A（１箇所とは限らない）に番号をふり，同じ番号を結論 B の右側に書く．

論理記号 $\wedge$ に関する規則は次の３つである．

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad\qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

左の２つは（$\wedge$ 除去）の規則，右は（$\wedge$ 導入）の規則と呼ばれる．

論理記号 $\vee$ に関する規則は次の３つである．

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad\qquad \frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

左の規則は，$A \vee B$ と仮定 A の下で C が導かれることと，仮定 B の下で C が導かれることから C を結論することを表しており,（$\vee$ 除去）の規則と呼ばれる．具体的な使用法は（$\to$ 導入）の場合と同様である．右の２つは（$\vee$ 導入）の規則と呼ばれる．

論理記号 $\neg$ に関する規則は次の３つである．

$$\frac{A \qquad \neg A}{\bot} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \qquad\qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

ここで，記号 $\bot$ は矛盾命題を表す特殊な命題記号である．最初の規則は A と $\neg A$ から矛盾が導かれることを表しており,（$\neg$ 除去）の規則と呼ばれる．次の規則は仮定 A の下で矛盾が導かれることから $\neg A$ を結論することを表しており,（$\neg$ 導入）の規則と呼ばれる．最後の規則は（$\neg\neg$ 除去）の規則と呼ばれる．自然演繹法における命題論理の推論規則は以上である．

述語論理においては，さらに以下の規則が加わる．

論理記号 $\forall$ に関する規則は次の２つである．

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t)} \qquad\qquad \frac{P(a)}{\forall x P(x)}$$

左の規則は（∀ 除去）の規則と呼ばれる．ここの t は $P(t)$ における束縛変項を含まない任意の項を表す．右の規則は（∀ 導入）の規則と呼ばれる．ここの a は，$P(a)$ に到る全ての仮定および $\forall x P(x)$ の中に自由変項として含まれない．

論理記号 ∃ に関する規則は次の 2 つである．

$$\frac{\exists x P(x) \qquad \begin{matrix}[P(a)]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad\qquad \frac{P(t)}{\exists x P(x)}$$

左の規則は（∃ 除去）の規則と呼ばれる．ここの a は，上段の C に到る仮定のうち $P(a)$ 以外のものと C 自身および $\forall x P(x)$ に自由変項として含まれない変項を表す．右の規則は（∃ 導入）の規則と呼ばれる．ここの t は $P(t)$ において束縛変項を含まない任意の項を表す．

以上が体系 NK の全ての推論規則である．

3. 推論方針の表現

体系 NK における証明図を計画するためには，最終目標から出発し，何らかの推論方針により新たな目標を設定するという作業を繰り返すことになる．本節では，発見タブローの書式により体系 NK の推論方針を図式化する．それらを組み合わせて実際に発見タブローをつくり，それに基いて証明図をつくる方法については次節で述べる．

シーケントによる証明計画図（[1]）が上から下に向かって書き並べられたシーケントから成るのに対し，発見タブローは上から下に向かって書き並べられた論理式から成る．それらの論理式のうち結論式（シーケントの後件に当たる論理式）の左端には記号−が付けられ，仮定式（シーケントの前件に当たる論理式）と区別される．以下，体系 NK の各推論方針の，発見タブローの書式による表現を示し，併せてその方針の実行方法を説明する．

• 方針（→ 結） $A \to B$ を結論とする証明図をつくるため，A を仮定とし B を結論とする証明図をつくる．

この方針を次の形式で表現する．

$$\begin{array}{l} -\ A \to B \\ \cdots\cdots \\ A \\ -\ B \end{array}$$

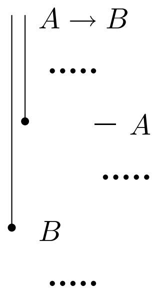
ここで，各式の文頭は直前の式の文頭と左右方向の位置を揃えて書かれる．これは，次に述べるタブローの「分岐」を文頭の位置をずらすことによって表現するためである．$A \to B$ と B は結論式であるため，その左端には記号−が付けられる．$-\ A \to B$ と A の間の $\cdots\cdots$ は，そこに有限個の式が書かれていてもよいことを表しており，$-\ A \to B$ の文頭から A の文頭と $-\ B$ の文頭に向かって引かれた矢印は，$A \to B$ を得るためには A の仮定の下で B を得ればよいという，三

者の論理的なつながりを表現している．シーケントによる証明計画図においては，各シーケントは常にその直前のシーケントから導出されるが，発見タブローにおける各式はそれ以前の任意の位置の式から導出される可能性があるため，式間の導出，被導出関係を示すために矢印を用いた．尚，矢印の左右方向の位置は任意とする．

この方針を実行する際には,（→ 導入）の規則を用いる．

• 方針（→ 仮） $A \to B$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため，$\neg C$ を仮定とし A を結論とする証明図と B を仮定とし C を結論とする証明図をつくる．

この方針を次の形式で表現する．



これは発見タブローが分岐するケースである．通常の導出と区別するため，$A \to B$ の文頭からー A の文頭と B の文頭に向かって引かれた線分は矢印ではなく，先端に黒丸印がついている．また，ー A の文頭の位置は直前の式の文頭の位置より右にずらされ，以後の式の文頭の位置は A を結論とする証明図の証明計画が完結するまでー A の文頭の位置より左に出ることはない．A の証明計画が完結した後 B を記入する際は，その文頭の位置はー $A \to B$ の文頭の位置に戻す．発見タブローが分岐した場合，タブローの上端から分岐した個々のタブローの下端に到る式の系列を「枝」という用語で表現する．式の導出は同じ枝に属する式の間でのみ行われる．

この方針を実行する際には，次のようにする．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{A \to B \qquad \begin{array}{c}(1)\\ \neg C\\ \cdots\cdots\\ A\end{array}}{B}\\ \cdots\cdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}(1)\\ \neg C\end{array}}{\perp}\;(1)}{\neg\neg C}}{C}$$

• 方針（∧ 結） $A \wedge B$ を結論とする証明図をつくるため，A を結論とする証明図と B を結論とする証明図をつくる．

この方針を次の形式で表現する．

− $A \wedge B$

·····

− A

·····

− B

·····

これも発見タブローが分岐するケースであり，矢印の代わりに線分と黒丸が用いられている．

この方針を実行する際には，($\wedge$ 導入) の規則を用いる．

• 方針（$\wedge$ 仮） $A \wedge B$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため，A と B を仮定とし C を結論とする証明図をつくる．

という方針を次の形式で表現する．

$A \wedge B$

·····

A

B

• 方針（$\vee$ 結） $A \vee B$ を結論とする証明図をつくるため，$\neg A$ を仮定とし B を結論とする証明図または，$\neg B$ を仮定とし A を結論とする証明図をつくる．

この方針を次の形式で表現する．

$A \vee B$ −

·····

A −

B −

この方針を実行する際には，$\neg$ と $\vee$ に関する次の派生規則を用いる．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ B\end{array}}{A \vee B}$$

• 方針（$\vee$ 仮） $A \vee B$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため，A を仮定とし C を結論とする証明図と B を仮定とし C を結論とする証明図をつくる．

この方針を次の形式で表現する.

$A \vee B$

$\cdots\cdots$

A

$\cdots\cdots$

B

$\cdots\cdots$

これも発見タブローが分岐するケースである.

この方針を実行する際には,（$\vee$ 除去）の規則を用いる.

• 方針（$\neg$ 結） $\neg A$ を結論とする証明図をつくるため，A を仮定とし $\perp$ を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$-\ \neg A$

$\cdots\cdots$

A

このように，発見タブローにおいては $\perp$ 記号は用いない.

この方針を実行する際には,（$\neg$ 導入）の規則を用いる.

• 方針（$\neg$ 仮） $\neg A$ を仮定とし $\perp$ を結論とする証明図をつくるため，A を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$\neg A$

$\cdots\cdots$

$-\ A$

この方針を実行する際には,（$\neg$ 除去）の規則を用いる.

• 方針（$\forall$ 結） $\forall x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため，$P(a)$（a はここまでのタブローに自由変項として現れない変項）を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$$
\begin{array}{l}
-\ \forall x P(x) \\
\cdots\cdots \\
-\ P(a)
\end{array}
$$

この方針を実行する際には, (∀ 導入）の規則を用いる.

• 方針（∀ 仮） $\forall x P(x)$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため，$\forall x P(x)$ と $P(t)$（t は $P(t)$ において束縛変項を含まない任意の項）を仮定とし C を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$$
\begin{array}{l}
\forall x P(x) \\
\cdots\cdots \\
P(t)
\end{array}
$$

この方針を実行する際には，(∀ 除去) の規則を用いる.

• 方針（∃ 結） $\exists x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため，$\neg\exists x P(x)$ を仮定とし $P(t)$（t は $P(t)$ において束縛変項を含まない任意の項）を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$$
\begin{array}{l}
-\ \exists x P(x) \\
\cdots\cdots \\
-\ P(t)
\end{array}
$$

この方針を実行する際には，次のようにする.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}(1)\\ \neg\exists x P(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(t)\end{array}}{\exists x P(x)} \qquad \begin{array}{c}(1)\\ \neg\exists x P(x)\end{array}}{\perp}\ (1)}{\neg\neg\exists x P(x)}}{\exists x P(x)}
$$

• 方針（∃ 仮） $\exists x P(x)$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため，$P(a)$（a はここまでのタブローに自由変項として現れない変項）を仮定とし C を結論とする証明図をつくる.

この方針を次の形式で表現する.

$\exists x P(x)$

$\cdots\cdots$

$P(a)$

この方針を実行する際には,（∃除去）の規則を用いる.

4. 発見タブローによる証明図の作成

前節で説明した 14 種の方針を組み合わせることにより発見タブローを作成し, それをもとに証明図を作成することができる.

例 4.1　$\forall x P(x) \to \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x[P(x) \to Q(x)]$

これを証明するための発見タブローとして，次のものが考えられる.

01　$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
02　$-\ \exists x[P(x) \to Q(x)]$
03　$-\ \forall x P(x)$
04　$-\ P(a)$
05　$-\ P(a) \to Q(a)$
06　$P(a)$
07　$-\ Q(a)$
08　$\exists x Q(x)$
09　$Q(b)$
10　$-\ P(b) \to Q(b)$
11　$P(b)$
12　$-\ Q(b)$

ここで，行番号は説明の都合上付したもので，実際のタブローには不要である．この発見タブローは次の手順で作成される.

01 行目：最初にシーケントの仮定式「$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$」を書く.

02 行目：続いて結論式「$\exists x[P(x) \to Q(x)]$」を，左端に記号－を付けて表示する.

03 行目：方針（→左）により,「$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$」を仮定とする証明図をつくるためには,「$\forall x P(x)$」を結論とする証明図と「$\exists x Q(x)$」を仮定とする証明図をつくればよい．そこでタブローを分岐させ，まず「$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$」から黒丸つき線分を引いて「－ $\forall x P(x)$」を書き加える.

04 行目：方針（∀右）により,「$\forall x P(x)$」を結論とする証明図をつくるためには,「$P(a)$」を結論とする証明図をつくればよい．そこで,「$\forall x P(x)$」から矢印を引いて「－ $P(a)$」を書き加える.

05 行目：方針（∃右）により,「$\exists x[P(x) \to Q(x)]$」を結論とする証明図をつくるためには,「$P(a) \to Q(a)$」を結論とする証明図をつくればよい．そこで,「$-\ \exists x[P(x) \to Q(x)]$」がら矢印を引いて「$-\ P(a) \to Q(a)$」を書き加える．

06,07 行目：方針（→右）により,「$P(a) \to Q(a)$」を結論とする証明図をつくるためには,「$P(a)$」を仮定とし「$Q(a)$」を結論とする証明図をつくればよい．そこで,「$-\ P(a) \to Q(a)$」から矢印を引いて「$P(a)$」と「$-\ Q(a)$」を書き加える．ここで，同じ枝の中に「$P(a)$」と「$-\ P(a)$」が現れた．これは，仮定と結論に同じ論理式が現れたことを意味するので，この枝は完結した．

08 行目：「$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$」から黒丸つき線分を引いて「$-\ \exists x Q(x)$」を書き加える．

09 行目：方針（∃左）により,「$\exists x Q(x)$」を仮定とする証明図をつくるためには,「$Q(b)$」を仮定とする証明図をつくればよい．そこで,「$\exists x Q(x)$」から矢印を引いて「$Q(b)$」を書き加える．

10 行目：方針（∃右）により,「$\exists x[P(x) \to Q(x)]$」を結論とする証明図をつくるためには,「$P(b) \to Q(b)$」を結論とする証明図をつくればよい．そこで,「$-\ \exists x[P(x) \to Q(x)]$」から矢印を引いて「$-\ P(b) \to Q(b)$」を書き加える．

11,12 行目：方針（→右）により,「$P(b) \to Q(b)$」を結論とする証明図をつくるためには,「$P(b)$」を仮定とし「$Q(b)$」を結論とする証明図をつくればよい．そこで,「$-\ P(b) \to Q(b)$」から矢印を引いて,「$P(b)$」と「$-\ Q(b)$」を書き加える．ここで，同じ枝の中に「$Q(b)$」と「$-\ Q(b)$」が現れた．これは，仮定と結論に同じ論理式が現れたことを意味するので，この枝も完結し，以上で発見タブローが完成した．

発見タブローによる証明計画が完成すれば，シーケントによる場合と同様，下から上に向かって証明計画を実行していくことにより体系 NK の証明図を作ることができる．ただし，発見タブローにおいては各段階における全ての仮定命題と結論命題が列記されているわけではないため，計画の実行に際していくつか注意すべき点がある．以下でそれを確認する．

• 発見タブローは下から上に向かって辿っていくので,「$\exists x Q(x)$」側の枝から始める．まず,「$Q(b)$」のみからなる証明図

$$Q(b)$$

をつくる．

• 発見タブローを辿る際，矢印の先端に注目する．矢印の先端のうち最も下のものが 12 行目，その次が 11 行目にあり，共に 10 行目からの矢印である．そこで，これらが表す方針（右 →）を実行する．上のタブローにおいて 0 個の仮定「$P(b)$」を消去することによって次の証明図を得る．

$$\dfrac{Q(b)}{P(b) \to Q(b)}$$

• 次に先端が下方の矢印は 2 行目から 10 行目に到る矢印であるから，方針（右 ∃）を実行して次の証明図を得る．

$$\dfrac{\dfrac{Q(b)}{P(b) \to Q(b)}}{\exists x[P(x) \to Q(x)]}$$

• 次に先端が下方の矢印は 8 行目から 9 行目に到る矢印であるから，方針（左 ∃）を実行して次の証明図を得る．

$$\dfrac{\exists x Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{(1)}{Q(b)}}{P(b) \to Q(b)}}{\exists x[P(x) \to Q(x)]} \qquad (1)}{\exists x[P(x) \to Q(x)]} \qquad \text{（証明図 A）}$$

• 次に,「$-\ \forall x P(x)$」側の枝に移る．まず,「$P(a)$」のみからなる証明図

$$P(a)$$

をつくる．

• この枝にかかる矢印のうち先端が最も下にあるのは 5 行目から 6 行目に到る矢印である．そこで次に方針（右 $\to$）を実行することになるが，そのためには証明図の結論が「$Q(a)$」になっていなければならない．発見タブローの実行に際しては，このように「結論の変更」が必要となる場合がある．そこで結論「$P(a)$」を否定し，仮定「$\neg Q(a)$」（この場合 0 個）を消去することによって次の証明図を得る．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a) \qquad \neg P(a)}{\bot}}{\neg\neg Q(a)}}{Q(a)}$$

続いて方針（右 $\to$）を実行して次の証明図を得る．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{(2)}{P(a)} \qquad \neg P(a)}{\bot}}{\neg\neg Q(a)}}{Q(a)} \quad (2)}{P(a) \to Q(a)}$$

• 次に先端が下方の矢印は 2 行目から 5 行目に到る矢印であるから，方針（右 $\exists$）を実行して次の証明図を得る．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{(2)}{P(a)} \qquad \neg P(a)}{\bot}}{\neg\neg Q(a)}}{Q(a)} \quad (2)}{P(a) \to Q(a)}}{\exists x[P(x) \to Q(x)]}$$

• 次に先端が下方の矢印は 3 行目から 4 行目に到る矢印なので方針（右 $\forall$）を実行することになるが，そのためには証明図の結論が「$P(a)$」になっていなければならない．そこで，結論の変更を行い次の証明図を得る．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{(2)}{P(a)}$}
\AxiomC{$\overset{(3)}{\neg P(a)}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\neg Q(a)$}
\UnaryInfC{$Q(a)$}
\RightLabel{(2)}
\UnaryInfC{$P(a)\to Q(a)$}
\UnaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\AxiomC{$\neg\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(3)}
\UnaryInfC{$\neg\neg P(a)$}
\UnaryInfC{$P(a)$}
\end{prooftree}
$$

続いて方針（右 $\forall$）を実行して次の証明図を得る.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{(2)}{P(a)}$}
\AxiomC{$\overset{(3)}{\neg P(a)}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\neg Q(a)$}
\UnaryInfC{$Q(a)$}
\RightLabel{(2)}
\UnaryInfC{$P(a)\to Q(a)$}
\UnaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\AxiomC{$\neg\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(3)}
\UnaryInfC{$\neg\neg P(a)$}
\UnaryInfC{$P(a)$}
\UnaryInfC{$\forall x P(x)$}
\end{prooftree}
$$

（証明図 B）

● 最後に，1 行目から 3 行目と 8 行目に到る黒丸付き線分により，方針（左 $\to$）を実行して（証明図A）と（証明図B）から次の証明図を得る.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x P(x)\to\exists x Q(x)$}
\AxiomC{$\overset{(2)}{P(a)}$}
\AxiomC{$\overset{(3)}{\neg P(a)}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\neg Q(a)$}
\UnaryInfC{$Q(a)$}
\RightLabel{(2)}
\UnaryInfC{$P(a)\to Q(a)$}
\UnaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\AxiomC{$\overset{(4)}{\neg\exists x[P(x)\to Q(x)]}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(3)}
\UnaryInfC{$\neg\neg P(a)$}
\UnaryInfC{$P(a)$}
\UnaryInfC{$\forall x P(x)$}
\BinaryInfC{$\exists x Q(x)$}
\AxiomC{$\overset{(1)}{Q(a)}$}
\UnaryInfC{$P(a)\to Q(a)$}
\UnaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\RightLabel{(1)}
\BinaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\AxiomC{$\overset{(4)}{\neg\exists x[P(x)\to Q(x)]}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$\neg\neg\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\UnaryInfC{$\exists x[P(x)\to Q(x)]$}
\end{prooftree}
$$

ここでは現れなかったが,「結論の変更」は方針（$\vee$ 左）に関しても用いられることがある．すなわち，方針（$\vee$ 左）を実行しようとする際に得られている２つの証明図の結論式が異なっていた場合,「結論の変更」によってそれを揃える必要がある．

発見タブローを用いて体系 NK の証明図を作成する手順は，次のようにまとめることができる．

[1] 目的とする証明図の仮定式，結論式を列挙する．その際各式の文頭の位置を揃え，結論式の左端に記号ーを付ける．

[2] 前述の１２種の方針に従って論理式を書き足し，上から下に向かって発見タブローをつくっていく．

[3] 全ての枝に「ー A」と「A」の形の式が現れるまで論理式を書き足し，発見タブローを完成する．

[4] 完成した発見タブローにおいて最も下に位置する枝が「ー A」と「A」の形の式により完結している場合，A のみからなる証明図から始め，発見タブローを下から上に向かって辿りながら，方針にしたがって順次証明図を作成していく．

[5] 発見タブローにおける各枝に対し，下から順に同様の作業を行うことにより，証明図を完成する．

5. 実際の数学に対する応用

「はじめに」で述べたように，発見タブローは実際の数学に対して応用することができる．シーケントによる証明計画図と比べ，仮定を列挙する必要のない発見タブローは実用的であるが，実践ではさらに矢印記号を省略することが考えられる．数学の証明のための発見タブローでは，他にもいくつかの相違点が考えられるが，以下の例題でそれらを確認する．

例 5.1　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

これを証明するための発見タブローとして次のものが考えられる．

01	ー $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
02	$\log_a b = x$
03	ー $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
04	ー $x \log_c a = \log_c b$
05	ー $\log_c a^x = \log_c b$
06	ー $a^x = b$
07	$a^x = b$

01 行目：文頭にー記号を付して結論を表示．厳密には，a, b, c が正の実数であるという仮定が存在するが，省略する．
02 行目：これは x の定義なので前提なしに書かれる．論理的には，$\log_a b = \log_a b$ から $\exists x[\log_a b = x]$ を導いた後に書くのが正式であるが，省略する．
03 行目：$\log_a b = x$（02）のもとで，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（01）であるためには $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ であればよい，という推論によりこの行が得られる．このように２つの式から１つの式を導く過程は，体系 NK の発見タブローには登場しなかったが，実際の数学においては頻出する．体系 NK の場合で

も，このような推論，例えば $A \to B$ と A から B を導くことを許せば，発見タブローの効率化に役立つ．
04,05,06 行目：順次式変形であるが，等号，商，対数に関する推論が省略されている．
07 行目：02 行目の式と対数の定義から得られるが，厳密な推論は省略されている．06,07 行目より，発見タブローは完結した．

この発見タブローから機械的に証明図を作成できるが，次のような通常の形式の証明を書くことも可能である．

［証明］　$\log_a b = x$ とおくと，$a^x = b$，$\log_c a^x = \log_c b$，$x \log_c b = \log_c a$ なので，$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$．
これに $\log_a b = x$ を代入すると，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$．

例 5.2　a と b が互いに素な自然数であるとき，ab は a と b の最小公倍数である．

このことを，公倍数が最小公倍数の倍数であることを用いて証明するための発見タブローとして，次のものが考えられる．

01　a, b：互いに素な自然数
02　ー ab：a, b の最小公倍数
03　L：a, b の最小公倍数
04　ー $ab = L$
05　ab：a, b の公倍数
06　ab：L の倍数
07　$ab = kL$，k は自然数
08　ー $k = 1$
09　k：a, b の公約数
10　　　ー k：a の約数
11　　　$a/k = L/b$
12　　　ー b：L の約数
13　ー k：b の約数
14　$b/k = L/a$
15　ー a：L の約数

01 行目：仮定を表示
02 行目：文頭にー記号を付して結論を表示．
03 行目：これは L の定義なので前提なしに書かれる．
04 行目：L が a と b の最小公倍数（03）であるとき，ab が a と b の最小公倍数である（02）ためには $ab = L$ であればよい，という推論によってこの行が得られる．
05 行目：推論に有用な事実として，前提なしに書かれる．
06 行目：公倍数が最小公倍数の倍数であることを用い，04,05 行目から得られる．
07 行目：前行より存在を保証される自然数 k を定義する．
08 行目：$ab = kL$（07）のもとで，$ab = L$（04）であるためには $k = 1$ であればよい，という推論によってこの行が得られる．
09 行目：a, b が互いに素（01）であるとき，$k = 1$（08）であるためには k が a, b の公約数であればよい，という推論によってこの行が得られる．
10 行目：ここでタブローが分岐し，まず k が a の約数であることを結論に設定する．

11 行目：07 行目の式を，10 行目の目標に合わせて変形する．
12 行目：$a/k = L/b$（11）のもとで，k が a の約数（10）であるためには b が L の約数であればよい，という推論によってこの行が得られる．
この結論は 03 行目から導かれるのでこの枝は完結した．
13 行目：次の枝に移り，k が b の約数であることを結論に設定する．
14 行目：07 行目の式を，13 行目の目標に合わせて変形する．
15 行目：$b/k = L/a$（14）のもとで，k が b の約数（13）であるためには a が L の約数であればよい，という推論によってこの行が得られる．
この結論は 03 行目から導かれるのでこの枝も完結した．

この発見タブローから，次の証明が得られる．

［証明］　L を a, b の最小公倍数とする．ab は a, b の公倍数なので，L の倍数である．そこで，$ab = kL$ となる自然数 k をとる．$a/k = L/b$ であって b が L の約数であることから k は a の約数であり，$b/k = L/a$ であって a が L の約数であることから k は b の約数なので，k は a, b の公約数である．ところが a, b は互いに素なので $k = 1$．以上により，$ab = L$ は a と b の最小公倍数である．

例 5.3　$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.
これを $\epsilon - \delta$ 論法で証明するための発見タブローとして，次のものが考えられる．

01	$-\ \lim_{x \to a} x^2 = a^2$
02	$\epsilon > 0$
03	$-\ \delta > 0,\ \forall x[|x-a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon]$
04	$|x - a| < \delta$
05	$-\ |x^2 - a^2| < \epsilon$
06	$-\ |x+a||x-a| < \epsilon$
07	$|x+a| = |x-a+2a| \leqq |x-a| + 2|a|$
08	$-\ (|x-a| + 2|a|)|x-a| < \epsilon$
09	$-\ (\delta + 2|a|)\delta < \epsilon$
10	$\delta < 1$
11	$-\ (1 + 2|a|)\delta < \epsilon$
12	$-\ \delta < \dfrac{\epsilon}{1+2|a|}$
13	$-\ 0 < \delta < Min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$

01 行目：文頭に－記号を付して結論を表示．
02,03 行目：$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$（01）をいうためには，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\forall x[|x-a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon]$ を満たす $\delta > 0$ が存在することをいえばよい．そこで，$\epsilon > 0$ を仮定して（任意の x に対し）$|x-a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon$ を示すためにこれらの行を書く．ただし，δ の値はここでは定めず，証明のために必要な δ の条件が出揃ったところで，これを定義する．
04,05 行目：$|x-a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon$（03）をいうためには，$|x-a| < \delta$ を仮定して $|x^2 - a^2| < \epsilon$ をいえばよいという推論によってこれらの行を得る．
06 行目：$|x^2 - a^2| < \epsilon$（05）の左辺を変形してこの行を得る．
07 行目：前提なしに成り立つ不等式として記入する．
08 行目：$|x+a| = |x-a+2a| \leqq |x-a| + 2|a|$（07）を用いて $|x+a||x-a| < \epsilon$（06）をいうためには $(|x-a| + 2|a|)|x-a| < \epsilon$ をいえばよいという推論によってこの行を得る．

09 行目：$|x-a|<\delta$（04）のもとで，$(|x-a|+2|a|)|x-a|<\epsilon$（08）をいうためには $(\delta+2|a|)\delta<\epsilon$ をいえばよいという推論によってこの行を得る．
10 行目：$\delta<1$ となるように δ をとることとし，この行を書く．
11 行目：$\delta<1$（11）のもとで，$(\delta+2|a|)\delta<\epsilon$（09）をいうためには $(1+2|a|)\delta<\epsilon$ をいえばよいという推論によってこの行を得る．
12 行目：$(1+2|a|)\delta<\epsilon$（11）を変形して，この行を得る．
13 行目：$\delta>0$（03），$\delta<1$（11），$\delta<\dfrac{\epsilon}{1+2|a|}$（13）が成り立つように，ここで δ を定める．

この発見タブローから，次の証明が得られる．

［証明］　任意の $\epsilon>0$ を考える．$0<\delta<Min\left\{1,\frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ となる δ をとると，$\delta<\dfrac{\epsilon}{1+2|a|}$ より $(1+2|a|)\delta<\epsilon$．これと $\delta<1$ より $(\delta+2|a|)\delta<\epsilon$．よって，$|x-a|<\delta$ であるような任意の x に対して $(|x-a|+2|a|)|x-a|<\epsilon$ となる．これと $|x+a|=|x-a+2a|\leqq|x-a|+2|a|$ より $|x+a||x-a|<\epsilon$ すなわち $|x^2-a^2|<\epsilon$ が成り立つ．従って $\forall x[|x-a|<\delta\rightarrow|x^2-a^2|<\epsilon]$ を満たす $\delta>0$ が存在した．以上により，$\lim_{x\to a}x^2=a^2$．

6. おわりに

学生が新しい証明問題に取り組む際に手本となるのは，過去の証明そのものよりもそれらの発見のための探索過程である．従って，学生の問題解決能力の育成という観点からは，定理や証明そのものの解説だけでなく「その証明を発見するためにはどのように考えたらよいか」といった話が講義に盛り込まれることが望ましい．本稿で提案した方法は，シーケントによる証明計画図同様，証明計画を支援する手法として有用であると同時に，教師が学生に証明の探索過程を効率的に説明するための手法としても有用であると思われる．

参考文献

[1] 中西泰雄，シーケントを用いた証明計画法，東京都立産業技術高等専門学校研究紀要，第４号，2010.

[2] 松本和夫，数理論理学，共立出版，1970.

[3] N.W. テニント，自然演繹の論理学，八千代出版，1981.

[4] John Nolt/Dennis Rohatyn，現代論理学，オーム社，1995.

[5] リチャード・ジェフリー，形式論理学，産業図書，1995.

[6] 日本数学会，岩波数学辞典第４版，岩波書店，2007.