背理法を用いない論理体系とその証明計画

A Logical System without Reductio ad Absurdum
and the Planning of the Proofs

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract: In a proof by reducio ad absurdum (RAA), once we put false assumptions, it is hard to distiguish true statements from others in the following part of the proof. On the other hand, all intermediate statements in a direct proof are true. This means that a direct proof has far more informations than the corresponding RAA proof. Therefore, from educational point of view, it is very fruitful to write proofs without RAA.

In our former research, we introduced an efficient logical system called WNK which is free from RAA. However, ordinary proofs used in mathematics are closer to NK of Gentzen rather than WNK. In this paper, we introduce another logical system PNK which is also free from RAA, and explain the planning method of PNK proofs by means of sequents.

Keywords: Proof, RAA, PNK

1 はじめに

背理法による証明においては、ひとたび偽の仮定を置いてしまえば、以後に導かれる主張のうちどれが正しいかは判別することは困難である。一方、直接的な証明においては中途段階の主張は全て正しい。これは、直接証明が背理法の証明に比べて格段に多くの情報を持っていることを意味する。従って教育的見地からすると、背理法を用いないで証明を書くことは極めて有用である。

［6］では、背理法を用いない効率的な論理体系 WNK を導入した。WNK の証明図は上下双方向に枝分かれする木構造を持っていて、この特徴が WNK の証明を簡潔にし、背理法によらない証明を可能にしている。しかし、数学で用いられる通常の証明はこの WNK よりも Gentzen の自然演繹体系 NK に近い。

本稿では、背理法を用いないもうひとつの論理体系 PNK を導入し、シーケントを用いた PNK の証明計画法を説明する。PNK の証明図は WNK と NK の証明図の中間的な形式を有しているため、PNK は WNK の証明を数学における通常の形に解釈する方法を示唆している。

2 述語論理の言語

はじめに、本稿で用いる１階述語論理の言語を規定する。

原始記号は以下のものを用いる。

(1) 論理記号: $\to, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$

東京都立産業技術高等専門学校　ものづくり工学科

意味論的には、順に「ならば」,「かつ」,「または」,「でない」,「任意の」,「存在する」に対応する。

(2) 個体記号： $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$

(3) 関数記号： $f, g, h, \cdots$

ただし、各関数記号には自然数 n が対応しており、「n 変項関数記号」と呼ばれる。

(4) 述語記号： $P, Q, R, \cdots$

ただし、各述語記号には自然数 n が対応しており、「n 変項述語記号」と呼ばれる。特に、0 変項述語記号は命題記号とも呼ばれる。

次に「項」を定義する。

(1) 個体記号は項である。

(2) 任意の n 項関数記号 f，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$，に対し、
$f(t_1, t_2, \cdots t_n)$ も項である。

(3) 以上によって項とされる式のみが項である。

さらに,「論理式」を定義する。

(1) 任意の n 項述語記号 P，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$ に対し、
$P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ は論理式である。

(2) 任意の論理式 A, B に対し、
$\neg(A)$，$(A) \vee (B)$，$(A) \wedge (B)$，$(A) \to (B)$ は論理式である。

(3) 任意の変項 x，任意の論理式 A に対し、$\forall x[A]$，$\exists x[A]$ は論理式である。

(4) 以上によって論理式とされる式のみが論理式である。

例えば、定項 a，変項 x, y，1 項関数記号 f，2 項関数記号 g，1 項述語記号 P，2 項述語記号 Q に対し。

$$\forall x[(P(f(a))) \wedge (\neg(Q(a, f(x))))] \to (\exists y[(\forall x(P(x)) \vee (Q(f(a), g(y, f(y))))])$$

は論理式であるが、ここで括弧の省略規則を次のように定める。

(1) $P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ の形の部分論理式（素論理式）を囲む括弧は省略してもよい。

(2) $\neg(A)$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい。

(3) $\forall x[A]$ や $\exists x[A]$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい。

以上の規則によれば、先の論理式は次のように書くことができる：

$$\forall x[P(f(a)) \wedge \neg Q(a, f(x))] \to \exists y[\forall x P(x) \vee Q(f(a), g(y, f(y))]$$

3 体系 PNK

体系 PNK の証明図は体系 NK と同様の木構造を持つが、単独の論理式のみではなく論理式の列を扱う点が異なる。論理式の列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は、意味論的には「A_1 または A_2 または $\cdots$ または A_n」を表し、論理式の順序を変えてできる列はすべて同じものと見なす。空列を含む任意の列を Γ または Δ とすると、体系 PNK の推論規則は以下の型で表される。

（増） $\dfrac{\Gamma}{\Gamma, A}$ （減） $\dfrac{\Gamma,\ A,\ A}{\Gamma,\ A}$

（$\to$ 除去） $\dfrac{\Gamma,\ A \to B \qquad \Delta,\ A}{\Gamma,\ \Delta,\ B}$ （$\to$ 導入） $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Gamma,\ B\end{matrix}}{\Gamma,\ A \to B}$

(∧ 除去) $\dfrac{\Gamma,\ A\wedge B}{\Gamma,\ A}$ $\dfrac{\Gamma,\ A\wedge B}{\Gamma, B}$ (∧ 導入) $\dfrac{\Delta,\ A \qquad \Gamma,\ B}{\Delta,\ \Gamma,\ A\wedge B}$

(∨ 除去) $\dfrac{\Gamma,\ A\vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \Delta\end{matrix}}{\Gamma,\ \Delta}$ (∨ 導入) $\dfrac{\Gamma,\ A,\ B}{\Gamma,\ A\vee B}$

(¬ 除去) $\dfrac{\Gamma,\ A \qquad \Delta,\ \neg A}{\Gamma,\ \Delta}$ (¬ 導入) $\dfrac{}{A,\ \neg A}$

ここで、右の規則は、仮定なしに $A,\ \neg A$ を導いてよいことを表している。

(∀ 除去) $\dfrac{\Gamma,\ \forall P(x)}{\Gamma,\ P(t)}$ (∀ 導入) $\dfrac{\Gamma,\ P(a)}{\Gamma,\ \forall xP(x)}$

ここで、左の規則における t は任意の項である。右の規則における a は、$P(a)$ に到る全ての仮定の中に含まれない変項であり、$P(x)$ は $P(a)$ に現れる全ての a を x で置き換えてできる論理式を表す。

(∃ 除去) $\dfrac{\Gamma,\ \exists xP(x) \qquad \dfrac{[P(a)]}{\Delta}}{\Gamma,\ \Delta}$ (∃ 導入) $\dfrac{\Gamma,\ P(t)}{\Gamma,\ \exists xP(x)}$

ここで、左の規則における a は、上段の C に到る仮定のうち $P(a)$ 以外のものと C 自身に含まれない変項であり、$P(x)$ は $P(a)$ に現れる全ての a を x で置き換えてできる論理式を表す。右の規則における t は任意の項である。

例 3.1 $\forall x[P(x)\to Q(x)]$ と $\neg\forall x\neg P(x)$ から $\exists xQ(x)$ を導く証明図は、次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x[P(x)\to Q(x)]}{P(a)\to Q(a)} \qquad \dfrac{}{P(a),\ \neg P(a)}}{Q(a),\ \neg P(a)}}{\exists xQ(x),\ \forall x\neg P(x)} \qquad \neg\forall x\neg P(x)}{\exists xQ(x)}$$

4 体系 PNK の証明計画図

体系 NK をはじめとする論理体系における証明図を計画するためには、証明の目標に応じて何らかの方針を立て、新たな目標を設定するという作業を繰り返すことになる。筆者は [5] において体系 NK の推論方針をシーケントにより定式化し、さらにその積み重ねとして証明計画図を定義し、それによる証明図の作成法を示した。[6] では体系 WNK に関しても同様の証明計画法を示した。ここでは、体系 PNK に対しても同様の定式化を行う。

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ と $B_1, B_2, \cdots, B_m$ が論理式の列であるとき,

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m$$

という形の図式をシーケントといい，意味論的には「（A_1 かつ A_2 かつ $\cdots$ かつ A_n）ならば（B_1 または B_2 または $\cdots$ または B_m」と解釈する．さらに，$A_1, A_2, \cdots A_n$ を仮定とし列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ あるいはその一部を結論とする証明図を，シーケント $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m$ の証明図と呼ぶことにする（証明図における各仮定の出現回数は、０個を含めいくつでもよい）．以下，シーケントを用いて証明図の作成方針を定式化していく．

• 方針（→ 右） $A\to B$ を結論に含む証明図をつくるため、A を仮定とし B を結論に含む証明図をつくる。

この方針を、次の図式で表現する。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B$ の証明図を得るには、（$\to$ 導入）の規則を用いる。

• 方針（$\to$ 左）　$A \to B$ を仮定とする証明図をつくるため、A を結論に含む証明図と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, A$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（$\to$ 除去）の規則を用いる。

• 方針（$\wedge$ 右）　$A \wedge B$ を結論に含む証明図をつくるため、A を結論に含む証明図と B を結論に含む証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ の証明図と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B$ の証明図を得るには、（$\wedge$ 導入）の規則を用いる。

• 方針（$\wedge$ 左）　$A \wedge B$ を仮定とする証明図をつくるため、A と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（$\wedge$ 除去）の規則を用いる。

• 方針（$\vee$ 右）　$A \vee B$ を結論に含む証明図をつくるため、A と B を結論に含む証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B$ の証明図を得るには、（$\vee$ 導入）の規則を用いる。

• 方針（$\vee$ 左）　$A \vee B$ を仮定とする証明図をつくるため、A を仮定とする証明図と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, A \Rightarrow \Delta$ の証明図と $\Gamma, B \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（$\vee$ 除去）の規則を用いる。

● 方針（$\neg$ 右）　$\neg C$ を結論に含む証明図をつくるため、C を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C}{C, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$C, \Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C$ の証明図を得るには、次のようにする。まず、仮定 C を列 $C,\ \neg C$ に変え、（$\neg$ 導入）の規則の結果とする。次に、そこから結論列 Δ に到るまでのすべての列に $\neg C$ を書き加える。

● 方針（$\neg$ 左）　$\neg D$ を仮定とする証明図をつくるため、D を結論に含む証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \neg D \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, D$ の証明図から $\Gamma, \neg D \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（$\neg$ 除去）の規則を用いる。

● 方針（$\forall$ 右）　$\forall x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため、$P(a)$ を結論とする証明図をつくる。ただし、$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を変項 a で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a)}$$

ただし、a は $\Gamma, \Delta, P(x)$ に現れない。$\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a)$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x)$ の証明図を得るには、（$\forall$ 導入）の規則を用いる。

● 方針（$\forall$ 左）　$\forall x P(x)$ を仮定とし列 Δ を結論とする証明図をつくるため、$\forall x P(x)$ と $P(t)$ を仮定とし列 Δ を結論とする証明図をつくる。ただし、t は任意の項であり、$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \forall x P(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x P(x), P(t) \Rightarrow \Delta}$$

ここで、上のシーケントにおける $\forall x P(x)$ が下のシーケントにも残っていることに注意したい。$\Gamma, \forall x P(x) \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るためには $\Gamma, P(t) \Rightarrow \Delta$ の証明図が得られれば十分ではあるが、それは必ず存在するという保証はない。そこで、下式にも $\forall x P(x)$ を残すことによって上式と下式を意味論的に同値にし、$\forall x P(x)$ に関して再度本方針を適用する余地を残しておくのである。$\Gamma, \forall x P(x), P(t) \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, \forall x P(x) \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（$\forall$ 除去）の規則を用いる。

● 方針（$\exists$ 右）　$\exists x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため、$\neg\exists x P(x)$ を仮定とし $P(t)$ を結論とする証明図をつくる。ただし、t は任意の項であり、$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t)}$$

ここで、上のシーケントにおける $\exists x P(x)$ が下のシーケントにも残っているが、この理由は方針（$\forall$ 左）の場合と同様である。$\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t)$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x)$ の証明図を得るには、（$\exists$ 導入）の規則を用いる。

• 方針（$\exists$ 左）　$\exists x P(x)$ を仮定とし列 Δ を結論とする証明図をつくるため、式 $P(a)$ を仮定とし列 Δ を結論とするの証明図をつくる。ただし、$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を a で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \exists x P(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, P(a) \Rightarrow \Delta}$$

ただし、a は Γ, Π, Δ に現れない。$\Gamma, P(a) \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, \exists x P(x) \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには、（$\exists$ 除去）の規則を用いる。

以上の推論方針によって作成される証明計画図は、G 体系などの呼び名で知られるシーケントによる恒真性判定図と同じものになる。従って、PNK の証明図は最も効率的な証明計画図に直結している。PNK の証明図を作成する手順は、次のように述べることができる。

[1] 与えられたシーケントを、推論方針に従って順次分解、変形し、上から下に向かって証明計画図をつくっていく。

[2] 証明計画図の末端の全てのシーケントが、最終形、すなわち、$\Gamma, C \Rightarrow \Delta, C$ の形になるまで、分解、変形を続ける。

[3] 完成した証明計画図の末端のシーケントの証明図（ひとつの式のみからなる証明図）から始め、証明計画図を下から上に向かって辿りながら、方針にしたがって順次証明図を作成していく。

例 4.1　$\forall x[P(x) \to Q(x)],\ \neg\forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$（例 3.1）の証明計画図は、次のようになる。

$$\cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ \neg\forall x\neg P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)}{\cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \exists x Q(x),\ \forall x\neg P(x)}{\cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \exists x Q(x),\ \neg P(a)}{\cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)}{\cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ P(a) \to Q(a),\ P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)}{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ P(a) \Rightarrow \exists x Q(x),\ P(a) \qquad \cfrac{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ Q(a),\ P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)}{\forall x[P(x) \to Q(x)],\ Q(a),\ P(a) \Rightarrow \exists x Q(x),\ Q(a)}}}}}}$$

これにより、例 3.1 の証明図をつくることができる。

5 おわりに

体系 NK の証明図においては結論が常に１つであるため、証明計画を進める途中で結論の変更が必要となり、そのときに背理法が用いられることになった。体系 WNK の証明計画図では、その結論の変更が必要ないため背理法の必要がなくなったということは、[5] でも指摘した通りである。この点は体系 PNK の場合も同様であるが、こちらはより体系 NK に近い形式をとっている。従って体系 PNK の証明図は、実際の数学で用いる背理法によらない証明のひとつのモデルと考えることができる。

PNK の証明は、いわゆる G 体系の恒真性判定図と同じ形の証明計画図をもとにして直接的につくられるものであるため、極めて効率的な証明図といえる。また、体系 NK において背理法が果たしていた役割は、体系 PNK では「場合分け」に取って代わられていると見ることもできる。従って実際の証明においても、場合分けを駆使することにより背理法によらない効率的な証明が書けることが分かる。この構文論的な利点に加え、背理法を用いない証明がはじめに述べたような意味論的な利点を持つことを考えれば、背理法を用いない証明の持つ教育的効果は計り知れない。

6 参考文献

[1]　松本和夫：数理論理学，共立，1970

[2]　N.W. テニント：自然演繹の論理学，八千代，1981

[3]　竹内　外史，八杉　満利子：証明論入門，共立，1988

[4]　日本数学会：岩波数学辞典，第 4 版，岩波，2007

[5]　中西泰雄：シーケントを用いた証明計画法，都立産業技術高専研究紀要，第４号，2010

[6]　中西泰雄：背理法を用いない効率的な証明のシーケントによる計画法,
都立産業技術高専研究紀要，第５号，2011