

# 非定常不規則振動応答の自乗平均値の積分値の近似計算法 (非定常非白色雑音入力を受ける構造物の応答)

深野 あづさ<sup>1)</sup>, 青木 繁<sup>2)</sup>

## APPROXIMATE ESTIMATION METHOD FOR INTEGRAL OF MEAN SQUARE VALUE OF NONSTATIONARY RANDOM RESPONSE (RESPONSE OF STRUCTURE SUBJECTED TO NONSTATIONARY FILTERED WHITE NOISE EXCITATIONS)

Azusa FUKANO<sup>1)</sup> and Shigeru AOKI<sup>2)</sup>

The response of the structure subjected to nonstationary random vibration such as earthquake excitation is nonstationary random vibration. Calculating method for statistical characteristics of such a response is complicated. Practical and simplified method to obtain theoretical statistical value is required. Mean square value of the response is usually used to evaluate random response. Integral of mean square value of the response with respect to time corresponds to total energy of the response. In this paper, considering the dynamic characteristics of the ground, a simplified calculation method to obtain integral of mean square value of the structural response subjected to nonstationary white noise excitations is proposed. It is found that the proposed method gives exact value of integral of mean square value of the response.

Key Words : Random Vibration, Seismic Motion, Mean Square Value, Nonstationary Random Response, Envelope Function

### 1. 緒言

構造物が地震動入力を受けた場合、地震動が非定常不規則特性をもつために、構造物の応答も非定常不規則過程となる。このような応答の統計的特性を表す代表として自乗平均値がある[1]。応答の自乗平均値はエネルギーとも関連がある。応答のエネルギーは吸収エネルギーや累積疲労を評価するためにも用いられる[2]。構造物の非定常応答の自乗平均値を理論的に求める方法は複雑であるため、近似計算法が用いられることがある[3, 4]。前報[5]では、第一段階として地盤の振動特性を考慮しない、非定常白色雑音を地震入力とした場合の応答の自乗平均値の積分値の近似計算法を提案し、その有効性を明らかにした。本稿では、地盤の振動特性を考慮し、地震動入力として定常非白色雑音に振幅非定常特性を表す包絡関数を乗じて得られる非定常非白色雑音を用いた。構造物の基本的なモデルとして1自由度系を用いた。さらに、地盤も1自由度系でモデル化した。

非定常不規則振動応答の自乗平均値を、定常確率過程の自乗平均値と包絡関数の自乗の積で近似した。さらにこの自乗平均値の時間に関する積分値を求めた。本稿で用いたモデルは、構造物および地盤をそれぞれ1自由度系でモデル化した2自由度系である。2自由度系の定常

不規則振動応答の自乗平均値は公式として与えられている[6]。この手法は非定常不規則過程の自乗平均値の積分値を求める実用的な方法である。

### 2. 解析モデルと入力

図1に示すように、構造物を1自由度系でモデル化した。地盤モデルとして、地震動のパワースペクトル密度関数が次式で表されるとする田治見モデル[7]を用いる。

$$G(\omega) = \frac{\omega_g^4 + (2\zeta_g \omega_g \omega)}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_g \omega_g \omega)} B \quad (1)$$

ここで、 $\omega_g$ は地盤モデルの卓越円振動数、 $\zeta_g$ は地盤モデルの減衰比に相当する量、 $B$ は定数である。基盤への入力を定常白色雑音とすると、構造物と地盤を含めた力学モデルは図1のように表される。図中の $m$ は質量、 $c$ は減衰係数、 $k$ はばね定数、 $x$ は質点、 $y$ は地表面、 $y_g$ は基盤の絶対変位を表す。添字 $b$ は構造物、 $g$ は地盤を表す。また、 $\zeta_g = c_g / 2\sqrt{m_g k_g}$  および  $\omega_g = \sqrt{k_g / m_g}$  の関係がある。

質点と地表面の間の相対変位 $z_b(x_b - y)$ に関する運動方程式は、

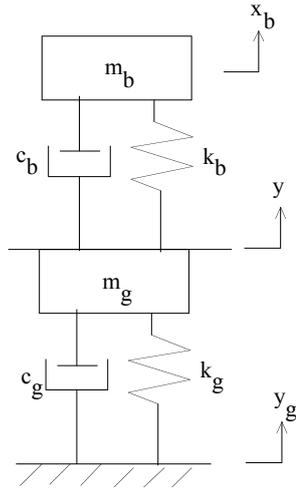


Fig.1 Model of structure and ground

$$\ddot{z}_b + 2\zeta_b\omega_b\dot{z}_b + \omega_b^2 z_b = -\ddot{y} \quad (2)$$

ここで、 $\zeta_b$  ( $c_b/2\sqrt{m_b k_b}$ ) および  $\omega_b$  ( $\sqrt{k_b/m_b}$ ) はそれぞれ構造物の減衰比および固有円振動数を表す。基盤への入力である定常白色雑音を  $\ddot{y}_g$  とすると、構造物への入力である非定常非白色雑音  $\dot{y}$  は地盤モデルを通じた定常非白色雑音と次式で表される地震動の非定常振幅特性を表す包絡関数  $I(t)$  の積で表されるものとする[8]。

$$I(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{|e^{-at} - e^{-bt}|_{\max}} \quad (3)$$

a および b の値を変えることによって包絡関数の形状を変えることができる。本稿では  $a=0.125$ ,  $b=0.25$  とした。この場合の包絡関数を図2に示す。地震動を表す運動方程式は次式のようになる。

$$\begin{cases} \ddot{z}_g + 2\zeta_g\omega_g\dot{z}_g + \omega_g^2 z_g = -\ddot{y}_g \\ \dot{y} = I(t)(\dot{z}_g + \dot{y}_g) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $z_g$  は地表面と基盤の間の相対変位を表す。

### 3. 非定常解析

ここでは構造物と地表面の相対変位  $z_b$  および相対速度

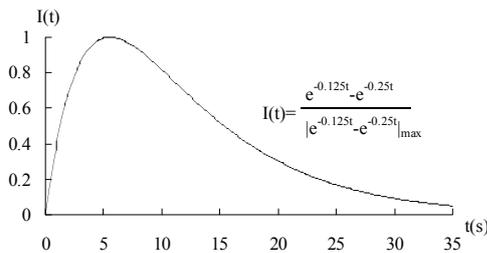


Fig.2 Envelope function

$\dot{z}_b$  に着目する。相対変位  $z_b$  の応答の自乗平均値は次式で与えられる自己相関関数から求まる。

$$R_{z_b}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\omega, t_1) G_s^*(\omega, t_2) S_0 d\omega \quad (5)$$

ここで、 $G_s(\omega, t)$  は非定常不規則過程に対するパワースペクトル密度関数である。 $G_s^*(\omega, t)$  は  $G_s(\omega, t)$  の共役複素関数である。 $S_0$  は式(4)の基盤への入力である定常白色雑音のパワースペクトル密度を表す。 $G_s(\omega, t)$  は次式で与えられる。

$$G_s(\omega, t) = \int_0^t h_s(t-\xi) I(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \quad (6)$$

ここで、 $h_s(t)$  は地盤を介した相対変位に対する単位インパルス応答関数を表し、 $i = \sqrt{-1}$  である。一方、相対速度  $\dot{z}_b$  の応答の自乗平均値は次式で与えられる自己相関関数から求まる。

$$R_{\dot{z}_b}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{z_b}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (7)$$

相対変位  $z_b$  の自乗平均値および相対速度  $\dot{z}_b$  の自乗平均値は次式で与えられる。

$$\sigma_{z_b}^2(t) = R_{z_b}(t, t) \quad (8)$$

$$\sigma_{\dot{z}_b}^2(t) = R_{\dot{z}_b}(t, t) \quad (9)$$

式(5)の積分は複雑である。応答の自乗平均値はモーメント方程式を解くことによっても得られる。運動方程式を次式のような状態方程式で表す。

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (10)$$

ここで、

$$\mathbf{z}^T = \{ z_g \quad z_b \quad \dot{z}_g \quad \dot{z}_b \} \quad (11)$$

$$\mathbf{f}^T = \{ 0 \quad 0 \quad -\ddot{y}_g \quad 0 \} \quad (12)$$

相対変位の自乗平均値  $\sigma_{z_b}^2(t)$  および相対速度の自乗平均値  $\sigma_{\dot{z}_b}^2(t)$  は、それぞれの確率量の平均値が0である場合に、次式で与えられる2次モーメントに関するモーメント方程式[9]から得られる。

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{G}^T + \mathbf{D} \quad (13)$$

ここで、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_g^2 & 0 & -2\zeta_g\omega_g & 0 \\ \omega_g^2 I(t) & -\omega_b^2 & 2\zeta_g\omega_g I(t) & -2\zeta_b\omega_b \end{bmatrix} \quad (14)$$

さらに、

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_g}^2 & \kappa_{z_g z_b} & \kappa_{z_g \dot{z}_g} & \kappa_{z_g \dot{z}_b} \\ \kappa_{z_g z_b} & \sigma_{z_b}^2 & \kappa_{z_g \dot{z}_b} & \kappa_{z_b \dot{z}_b} \\ \kappa_{z_g \dot{z}_g} & \kappa_{z_g \dot{z}_b} & \sigma_{\dot{z}_g}^2 & \kappa_{\dot{z}_g \dot{z}_b} \\ \kappa_{z_g \dot{z}_b} & \kappa_{z_b \dot{z}_b} & \kappa_{\dot{z}_g \dot{z}_b} & \sigma_{\dot{z}_b}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi S_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\sigma^2$ は添字で表される確率量の分散（自乗平均値）， $\kappa$ は添字で表される確率量の共分散を表す．モーメント方程式は10元連立1階微分方程式となる．

#### 4. 近似解析法

式(5)の積分で $I(t)$ が $\omega$ に独立であるとする， $\sigma_{z_b}^2(t)$ および $\sigma_{z_b}^2(t)$ は，それぞれ次式で与えられる．

$$\sigma_{z_b}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(\omega)|^2 d\omega \quad (17)$$

$$\sigma_{z_b}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega \quad (18)$$

ここで， $H_d(\omega)$ および $H_v(\omega)$ はそれぞれ基盤への入力に対する構造物の相対変位 $z_b$ および相対速度 $\dot{z}_b$ に関する周波数応答関数を表す．この場合に， $H_d(\omega)$ および $H_v(\omega)$ は次式で表される．

$$H_d(\omega) = \frac{R_d(\omega)}{R_m(\omega)} \quad (19)$$

$$H_v(\omega) = \frac{R_v(\omega)}{R_m(\omega)} \quad (20)$$

ここで，

$$\begin{aligned} R_m(\omega) &= \omega^4 - (2\zeta_g \omega_g + 2\zeta_b \omega_b) \omega^3 i \\ &\quad - (\omega_g^2 + \omega_b^2 + 4\zeta_g \zeta_b \omega_g \omega_b) \omega^2 \\ &\quad + (2\zeta_g \omega_g \omega_b^2 + 2\zeta_b \omega_b \omega_g^2) \omega i + \omega_g^2 \omega_b^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$R_d(\omega) = -(2\zeta_g \omega_g \omega i + \omega_g^2) \quad (22)$$

$$R_v(\omega) = -(2\zeta_g \omega_g \omega^2 + \omega_g^2 \omega i) \quad (23)$$

式(17)および式(18)の積分は定常不規則過程に対するものである．この積分は次の行列式を用いて計算することができる．

$$I_4 = \frac{\pi}{\lambda_4} \frac{\begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}} \quad (24)$$

ここで， $\lambda_0$ から $\lambda_4$ は

$$\begin{cases} \lambda_0 = \omega_b^2 \omega_g^2 \\ \lambda_1 = 2\zeta_b \omega_b \omega_g^2 + 2\zeta_g \omega_g \omega_b^2 \\ \lambda_2 = \omega_g^2 + \omega_b^2 (1 + \gamma) + 4\zeta_g \zeta_b \omega_g \omega_b \\ \lambda_3 = 2\zeta_g \omega_g \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \quad (25)$$

である．また， $\xi_0$ から $\xi_3$ は相対変位応答に対しては，

$$\xi_0 = \omega_g^4, \quad \xi_1 = (2\zeta_g \omega_g), \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad (26)$$

相対速度応答に対しては，

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \omega_g^4, \quad \xi_2 = (2\zeta_g \omega_g), \quad \xi_3 = 0 \quad (27)$$

である．したがって，式(17)の相対変位応答の自乗平均値は次式のようになる．

$$\sigma_{z_b}^2(t) = \{I(t)\}^2 I_4 S_0 \quad (28)$$

また，相対速度応答の自乗平均値も同様の式で与えられる．式(17)および式(18)は，式(5)または式(13)を用いる場合と比較して簡便である．式(17)および式(18)の近似が適切であるならば非定常不規則振動解析が容易となる．本研究では，式(17)および式(18)で得られた値を近似解，式(13)を用いて得られた値を厳密解とよぶことにする．

相対変位応答の自乗平均値の時間に関する0から無限大までの積分値は次式で表される．

$$I_{z_b} = \int_0^{\infty} \sigma_{z_b}^2(t) dt \quad (29)$$

近似解を用いると， $I_{z_b}$ は式(24)に式(25)および式(26)を用いて次式のようになる．

$$I_{z_b} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b) \left( \left| e^{-at} - e^{-bt} \right|_{\max} \right)^2} I_4 S_0 \quad (30)$$

相対速度の自乗平均値の時間に関する積分は次式で与えられる．

$$I_{\dot{z}_b} = \int_0^{\infty} \sigma_{\dot{z}_b}^2(t) dt \quad (31)$$

近似解は，式(24)に式(25)および式(27)を用いて，式(30)と同様の式から求めることができる．

#### 5. 計算結果

構造物の減衰比 $\zeta_b$ および固有周期 $T_b(2\pi/\omega_b)$ は実在の機械構造物や建築構造物などの測定値を参考にして定めた[10, 11]．地盤モデルの減衰比に相当する量 $\zeta_g$ ，地盤モデルの卓越周期 $T_g(2\pi/\omega_g)$ はこれまでの研究[12, 13]で用いられた値とした．

表1，表2および表3，表4にそれぞれ地盤の振動特性として $\zeta_g=0.1$ ， $T_g=0.3s$ および $\zeta_g=0.55$ ， $T_g=0.5s$ とした場合の構造物の応答の自乗平均値の積分値を示す．表1

Table 1 Integral of mean square value of response ( $T_b=0.5s$ ,  $\zeta_g=0.1$ ,  $T_g=0.3s$ )

$\zeta_b$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.01	2.06	2.05	$3.25 \times 10^2$	$3.36 \times 10^2$
0.02	1.04	1.04	$1.70 \times 10^2$	$1.76 \times 10^2$
0.05	$4.35 \times 10^{-1}$	$4.35 \times 10^{-1}$	$7.65 \times 10$	$7.97 \times 10$
0.10	$2.29 \times 10^{-1}$	$2.29 \times 10^{-1}$	$4.42 \times 10$	$4.64 \times 10$

Table 2 Integral of mean square value of response ( $\zeta_b=0.01$ ,  $\zeta_g=0.1$ ,  $T_g=0.3s$ )

$T_b(s)$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.2	$4.68 \times 10^{-2}$	$4.68 \times 10^{-2}$	$3.36 \times 10$	$3.98 \times 10$
0.5	2.06	2.05	$3.25 \times 10^2$	$3.36 \times 10^2$
0.8	4.70	4.70	$2.95 \times 10^2$	$2.99 \times 10^2$
1.0	8.17	8.17	$3.28 \times 10^2$	$3.31 \times 10^2$

Table 3 Integral of mean square value of response ( $T_b=0.5s$ ,  $\zeta_g=0.55$ ,  $T_g=0.5s$ )

$\zeta_b$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.01	1.53	1.53	$2.39 \times 10^2$	$2.39 \times 10^2$
0.02	$7.59 \times 10^{-1}$	$7.59 \times 10^{-1}$	$1.17 \times 10^2$	$1.17 \times 10^2$
0.05	$2.97 \times 10^{-1}$	$2.97 \times 10^{-1}$	$4.46 \times 10$	$4.46 \times 10$
0.10	$1.43 \times 10^{-1}$	$1.43 \times 10^{-1}$	$2.06 \times 10$	$2.06 \times 10$

Table 4 Integral of mean square value of response ( $\zeta_b=0.01$ ,  $\zeta_g=0.55$ ,  $T_g=0.5s$ )

$T_b(s)$	Displacement ( $m^2 \cdot s$ )		Velocity ( $m^2/s^2 \cdot s$ )	
	Exact	Approximate	Exact	Approximate
0.2	$1.41 \times 10^{-2}$	$1.41 \times 10^{-2}$	$1.30 \times 10$	$1.30 \times 10$
0.5	1.53	1.53	$2.39 \times 10^2$	$2.39 \times 10^2$
0.8	6.00	6.00	$3.70 \times 10^2$	$3.70 \times 10^2$
1.0	$1.01 \times 10$	$1.01 \times 10$	$4.01 \times 10^2$	$4.01 \times 10^2$

および表 3 は構造物の固有周期  $T_b$  を  $0.5s$  に固定し、減衰比  $\zeta_b$  を変化させた場合、表 2 および表 4 は減衰比  $\zeta_b$  を  $0.01$  に固定し、固有周期  $T_b$  を変化させた場合の構造物の応答の自乗平均値の積分値を示す。表 1 および表 2 のように、地盤の減衰比に相当する量である  $\zeta_g$  が小さいと、速度応答に関しては近似解が厳密解よりやや大きくなる傾向があるが、全体的に本研究で提案した近似計算法による結果は厳密解とよく一致することが明らかになった。

本手法の利点は定常確率過程の自乗平均値を求めておけば、包絡関数が変わっても相対変位応答および相対速度応答の自乗平均値の積分値が式(30)から求まる点にある。厳密解は適切な時間刻みで式(13)のモーメント方程式を解き、加算する必要がある。近似計算法の速度は式(24)の行列式の計算速度によるが、モーメント方程式を解くより計算時間が短い。そのため、近似計算法の方が、計算時間の点で有利である。

## 6. 結言

構造物が地震動入力のような非定常不規則振動入力を受ける場合の非定常不規則振動応答の自乗平均値の積分値を求める近似計算法を提案した。構造物の基本的なモデルとして 1 自由度系を用いた。この方法では、比較的容易に求まる定常不規則振動応答の自乗平均値を用いた。地盤の振動特性を考慮した非定常非白色雑音を入力として用いた場合の応答の自乗平均値の積分値について検討した。その結果、本研究で提案した近似計算法による結果は厳密解とよく一致することが明らかになった。

## 文 献

- [1] Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, (1993), 471-515
- [2] Soong, T.T. and Dargush, G.F., Passive Energy Dissipation

- Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, Chichester, (1997), 5-34
- [3] Hasselman, T., Probabilistic Displacement Time History of a Single Degree of Freedom System, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 98-6, (1972), 519-530
- [4] Bucher, C.G., Approximate Nonstationary Random Vibration Analysis for MDOF System, Journal of Applied Mechanics, ASCE, 51-1, (1988), 197-200
- [5] 青木繁・深野あづさ：非定常地震応答の自乗平均値の積分値の近似計算法，東京都立産業技術高等専門学校研究紀要，第4号，(2010)，CD-ROM
- [6] Crandall, S.H. and Mark, W.D., Random Vibration in Mechanical System, Academic Press, (1963), 106-110
- [7] Tajimi, H., A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake, Proceedings of 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Vol. II, (1960), 781-797
- [8] Shinozuka, M. and Sato, Y., Simulation of Nonstationary Random Process, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, EM1, (1967), 11-40
- [9] Roberts, J.B. and Spanos, P.D. : Random Vibration and Stochastic Linearization, John Wiley & Sons, Chichester, (1990), 113-115
- [10] 日本機械学会編，耐震設計と構造動力学，日本工業出版，(1985)，149-216
- [11] 日本建築学会編，建築学便覧Ⅱ構造，丸善，(1977)，666-667
- [12] 片山恒夫：擬似地震動の特性に関する研究，土木学会論文報告集，第162号，(1969)，1-10
- [13] 鈴木浩平・青木繁：付加構造物系の最悪地震応答特性，日本機械学会論文集，第387号，(1978)，3749-3758