背理法を用いない効率的な証明のシーケントによる計画法

On Planning of Efficient Proofs without Reductio ad Absurdum by means of Sequents

中西泰雄

Yasuo Nakanishi

Abstract: Reducio ad absurdum (RAA) is a typical method of proving in mathematics. In a proof by RAA, however, once we put false assumptions, it is hard to distiguish true propositions from other propositions in the following part of the proof. On the other hand, all intermediate propositions in a direct proof are true and mathematically understandable. Therefore, from educational point of view, it is very fruitful to write proofs without RAA. By rewriting the proof by RAA into a direct one, moreover, we sometimes get more general theorem than the original one. In this paper, we introduce a logical system (WNK) which is free from RAA. The proof diagrams of WNK allow plural conclusions as well as plural assumptions, which makes the proof diagrams simple. Moreover, we show that proofs of WNK can be planned efficiently by using 'sequents' like in Gentzen's LK.

Keywords: Proof, Sequent, NK

1 はじめに

背理法は、数学における典型的な証明法のひとつである。しかし、背理法による証明においてひとたび偽の仮定を置いてしまえば、それ以後に導かれた命題のうちどれが真であるかは判別し難い。一方、直接的な証明においては中途段階の命題は全て正しく、数学的に理解可能である。従って教育的見地からすると、背理法を用いないで証明を書くことは極めて有用である。さらに、背理法による証明を直接的な証明に書き換えることにより、元の定理より一般的な結果が明らかになることもある。

この論文では、背理法を用いない論理体系（WNK）を導入する。WNK の証明図は複数の仮定とともに複数の結論を持ち、このことが証明図を単純化している。また、WNK の証明は Gentzen の LK におけるような「シーケント」を用いて効率的に計画できることを示す。

東京都立産業技術高等専門学校　ものづくり工学科

2 述語論理の言語

はじめに、本稿で用いる１階述語論理の言語を規定する。

原始記号は以下のものを用いる。

(1) 論理記号: $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$

意味論的には、順に「ならば」,「かつ」,「または」,「でない」,「任意の」,「存在する」に対応する。

(2) 個体記号： $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$

(3) 関数記号： $f, g, h, \cdots$

ただし、各関数記号には自然数 n が対応しており、「n 変項関数記号」と呼ばれる。

(4) 述語記号： $P, Q, R, \cdots$

ただし、各述語記号には自然数 n が対応しており、「n 変項述語記号」と呼ばれる。特に、0 変項述語記号は命題記号とも呼ばれる。

次に「項」を定義する。

(1) 個体記号は項である。

(2) 任意の n 項関数記号 f，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$，に対し、
$f(t_1, t_2, \cdots t_n)$ も項である。

(3) 以上によって項とされる式のみが項である。

さらに,「論理式」を定義する。

(1) 任意の n 項述語記号 P，任意の n 個の項 $t_1, t_2, \cdots t_n$ に対し、
$P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ は論理式である。

(2) 任意の論理式 A, B に対し、
$\neg(A)$，$(A) \vee (B)$，$(A) \wedge (B)$，$(A) \rightarrow (B)$ は論理式である。

(3) 任意の変項 x，任意の論理式 A に対し、$\forall x[A]$，$\exists x[A]$ は論理式である。

(4) 以上によって論理式とされる式のみが論理式である。

例えば、定項 a，変項 x, y，１項関数記号 f，２項関数記号 g，１項述語記号 P，２項述語記号 Q に対し。

$$\forall x[(P(f(a))) \wedge (\neg(Q(a, f(x))))] \rightarrow (\exists y[(\forall x(P(x)) \vee (Q(f(a), g(y, f(y))))])$$

は論理式であるが、ここで括弧の省略規則を次のように定める。

(1) $P(t_1, t_2, \cdots t_n)$ の形の部分論理式（素論理式）を囲む括弧は省略してもよい。

(2) $\neg(A)$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい。

(3) $\forall x[A]$ や $\exists x[A]$ の形の部分論理式を囲む括弧は省略してもよい。

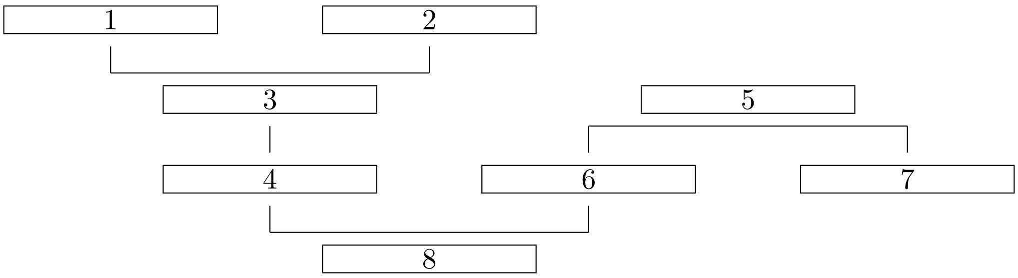
以上の規則によれば、先の論理式は次のように書くことができる：

$$\forall x[P(f(a)) \wedge \neg Q(a, f(x))] \rightarrow \exists y[\forall x P(x) \vee Q(f(a), g(y, f(y))]$$

3 体系 WNK

Gentzen のシーケント計算 LK の証明図は、「シーケント」で構成される。シーケントとは、有限個の論理式 $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m$ によって $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m$ と表現される図式であり、意味論的には「(A_1 かつ A_2 かつ $\cdots$ かつ A_n)ならば(B_1 または B_2 または $\cdots$ または B_m)」を表す。従って体系 LK は複数の仮定(の連言)と複数の結論(の選言)を扱う論理体系といえる。ところが、Gentzen の自然演繹体系 NK およびその派生体系における証明図は複数の仮定と 1 つの結論を持ち、上方向のみに分岐する樹形図となっている。そこで本稿では、上下方向に分岐する証明図によって複数の仮定と複数の結論を扱う論理体系 WNK を構成する。体系 WNK は、理論的には最も効率的と考えられる体系 LK に密接であるため効率的な論理体系といえるが、全ての仮定と結論を繰り返し表示する必要はないという意味では体系 LK より実用的である。また、WNK には矛盾記号が現れないため、背理法を用いない論理体系であることにも特徴がある。

体系 WNK の証明図は上下双方向に分岐するため、体系 NK の場合とは異なる形式をとる。例えば次のような形である。



これは、$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$(の連言)を仮定とし、$\boxed{7}$, $\boxed{8}$(の選言)を結論とする証明図であり、次のような推論を表す:

$\boxed{1}$と$\boxed{2}$(の連言)から$\boxed{3}$を導き、$\boxed{3}$から$\boxed{4}$を導く。一方で$\boxed{5}$から$\boxed{6}$と$\boxed{7}$(の選言)を導き、さらに$\boxed{4}$と$\boxed{6}$(の連言)から$\boxed{8}$を導く。

$A_1, A_2, \cdots, A_n$(の連言)を仮定とし、$B_1, B_2, \cdots, B_m$(の選言)を結論とする WNK の証明図を、シーケント $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m$ の証明図と呼び、次の図で表現する。

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hdashline B_1 & B_2 & \cdots & B_m \end{array}$$

さらに、論理式の列を必要に応じて Γ, Δ 等の記号で表す。体系 WNK の推論規則は以下の通りである。

- (上 $\rightarrow$)の規則

$A \rightarrow B$ と A から B を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \qquad & \Pi \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\Delta \quad A \to B \quad \Sigma & & \Phi \quad A \quad \Psi \\
 & B &
\end{array}$$

● （下 $\to$）の規則

仮定 A の下で B が導かれることから $A \to B$ を結論する規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{c}
\Gamma \quad A \quad \Pi \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta \quad B \quad \Sigma \\
A \to B
\end{array}$$

ここで、仮定式 A および結論式 B の個数は任意（0 個を含む）とする。例えば、仮定式 A が 2 個、結論式 B が 0 個の場合は次のように表現される。

$$\begin{array}{cc}
\Gamma \quad A \quad \Pi \quad A \quad \Phi & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Delta & A \to B
\end{array}$$

● （上 $\wedge$）の規則

$A \wedge B$ から A あるいは B を導く規則であり，次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \qquad & \Gamma \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta \quad A \wedge B \quad \Sigma & & \Delta \quad A \wedge B \quad \Sigma \\
| & & | \\
A & & B
\end{array}$$

● （下 $\wedge$）の規則

A と B から $A \wedge B$ を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \qquad & \Pi \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\Delta \quad A \quad \Sigma & & \Phi \quad B \quad \Psi \\
 & A \wedge B &
\end{array}$$

● （上 $\vee$）の規則

$A \vee B$ から A と B（の選言）を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & A \vee B & \Sigma \\ & \begin{array}{cc} A & \qquad B \end{array} & \end{array}$$

• （下 $\vee$）の規則

A あるいは B から $A \vee B$ を導く規則であり，次の形式で表現される．

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & A & \Sigma \\ & | & \\ & A \vee B & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & B & \Sigma \\ & | & \\ & A \vee B & \end{array}$$

• （上 $\neg$）の規則

$\neg A$ によって結論から A を取り除く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & A & \Sigma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \Pi & \\ \hline \Phi & \neg A & \Psi \end{array}$$

• （下 $\neg$）の規則

A と $\neg A$（の選言）を無条件で導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{cc} A & \qquad \neg A \end{array}$$

• （上 $\forall$）の規則

$\forall x P(x)$ から $P(t)$ を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & \forall x P(x) & \Sigma \\ & | & \\ & P(t) & \end{array}$$

ここの t は任意の項を表す。

• （下 $\forall$）の規則

$\forall x P(x)$ から $P(t)$ を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \hline \Delta & P(a) & \Sigma \\ & | & \\ & \forall x P(x) & \end{array}$$

ここの a は Γ，Δ，Σ の中に含まれない変項を表し、$P(x)$ は式 $P(a)$ のに現れる全ての a を x で置き換えた式を表す。

- （上 ∃）の規則

$P(a)$ を仮定とする証明図から $\exists x P(x)$ を仮定とする証明図をつくる規則であり、次の形式で表現される

$$\begin{array}{c} \exists x P(x) \\ | \\ \Gamma \quad P(a) \quad \Pi \\ \hdashline \Delta \end{array}$$

ここの a は Γ，Π，Δ の中に含まれない変項を表し、$P(x)$ は式 $P(a)$ のに現れる全ての a を x で置き換えた式を表す。

- （下 ∃）の規則

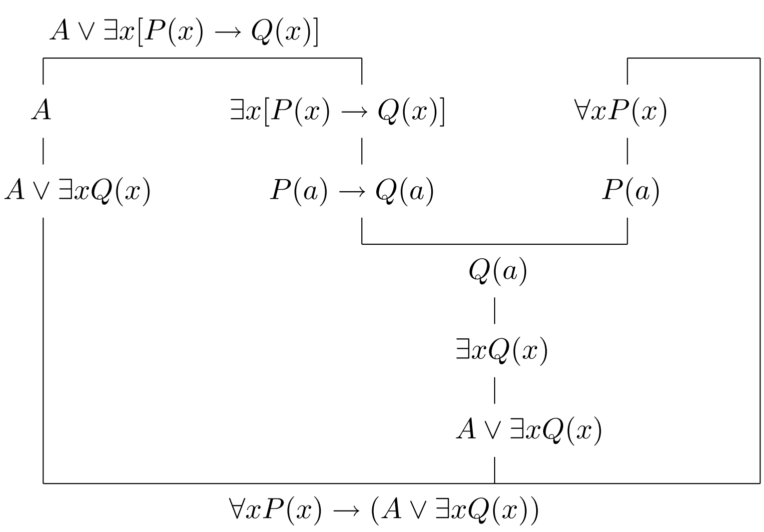
$P(t)$ から $\exists x P(x)$ を導く規則であり、次の形式で表現される。

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \hdashline \Delta \quad P(t) \quad \Sigma \\ | \\ \exists x P(x) \end{array}$$

ここの t は任意の項を表す。

以上で体系 WNK の全ての推論規則が揃った。

例 3.1　$A \vee \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to (A \vee \exists x Q(x))$ の証明図を示す。



この図は、次のような推論を表している：

•$A \vee \exists x[P(x) \to Q(x)]$ を仮定し、（上 $\vee$）の規則により A と $\exists x[P(x) \to Q(x)]$ に分ける。

•（下 $\vee$）の規則により A から $A \vee \exists xQ(x)$ を導き、（上 $\exists$）の規則により $\exists x[P(x) \to Q(x)]$ から $P(a) \to Q(a)$ を導く。

•$\forall xP(x)$ を仮定し、（上 $\forall$）の規則により $P(a)$ を導く。

•（上 $\to$）の規則により $P(a) \to Q(a)$ と $P(a)$ から $Q(a)$ を導き、（下 $\exists$）の規則により $Q(a)$ から $\exists xQ(x)$ を導き、さらに（下 $\vee$）の規則により $\exists xQ(x)$ から $A \vee \exists xQ(x)$ を導く。

• 以上で、仮定 $\forall xP(x)$ のもとで $A \vee \exists xQ(x)$ が導かれたことから、（下 $\to$）の規則により仮定 $\forall xP(x)$ を消去して $\forall xP(x) \to (A \vee \exists xQ(x))$ を導く。

4 体系 WNK の証明計画図

体系 NK を始めとする論理体系における証明図を計画するためには、証明の目標に応じて何らかの方針を立て、新たな目標を設定するという作業を繰り返すことになる。筆者は [5] において体系 NK の推論方針をシーケントにより定式化し、さらにその積み重ねとして証明計画図を定義し、それによる証明図の作成法を示した。体系 WNK の証明計画図は、体系 NK の証明計画図より簡潔なものとなる。また、推論方針の実行も体系 NK の場合より簡潔であることが多い。以下、体系 WNK の推論方針を列挙する。

• 方針（$\to$ 右）　$A \to B$ を結論とする証明図をつくるため、A を仮定とし B を結論とする証明図をつくる。

この方針を、次の図式で表現する。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B, \Sigma}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Sigma}$$

$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B, \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\to$）の規則を用いる。

• 方針（$\to$ 左）　$A \to B$ を仮定とする証明図をつくるため、A を結論とする証明図と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, A$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, A \to B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（上 $\to$）の規則を用いる。

• 方針（$\wedge$ 右）　$A \wedge B$ を結論とする証明図をつくるため、A を結論とする証明図と B を結論とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B, \Sigma}{}$$

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Sigma \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Sigma$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Sigma$ の証明図と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B, \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\wedge$）の規則を用いる。

• 方針（$\wedge$ 左）　$A \wedge B$ を仮定とする証明図をつくるため、A と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \wedge B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, A \wedge B, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（上 $\wedge$）の規則を用いる。

• 方針（$\vee$ 右）　$A \vee B$ を結論とする証明図をつくるため、A と B を結論とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B, \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\vee$）の規則を用いる。

• 方針（$\vee$ 左）　$A \vee B$ を仮定とする証明図をつくるため、A を仮定とする証明図と B を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, A \vee B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Pi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta}$$

$\Gamma, A, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図と $\Gamma, B, \Pi \Rightarrow \Delta.C$ の証明図から $\Gamma, A \vee B, \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには、（上 $\vee$）の規則を用いる。

• 方針（$\neg$ 右）　$\neg C$ を結論とする証明図をつくるため、C を仮定とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C, \Sigma}{C, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$C, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg C, \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\neg$）の規則を用いる。

• 方針（$\neg$ 左）　$\neg D$ を仮定とする証明図をつくるため、D を結論とする証明図をつくる。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \neg D, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, D}$$

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, D$ の証明図から $\Gamma, \neg D, \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（上 $\neg$）の規則を用いる。

• 方針（$\forall$ 右）　$\forall x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため、$P(a)$ を結論とする証明図をつくる。ただし、$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を変項 a で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x), \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a), \Sigma}$$

a は $\Gamma, \Delta, P(x), \Sigma$ に現れない。$\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a), \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(x), \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\forall$）の規則を用いる。

• 方針（$\forall$ 左）　$\forall x P(x)$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくるため、$\forall x P(x)$ と $P(t)$ を仮定とし C を結論とする証明図をつくる。ただし、t は任意の項であり、$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x P(x), P(t), \Pi \Rightarrow \Delta}$$

ここで、上のシーケントにおける $\forall x P(x)$ が下のシーケントにも残っていることに注意したい。$\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るためには $\Gamma, P(t), \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図が得られれば十分ではあるが、それは必ず存在するという保証はない。そこで、下式にも $\forall x P(x)$ を残すことによって上式と下式を意味論的に同値にし、$\forall x P(x)$ に関して再度本方針を適用する余地を残しておくのである。$\Gamma, \forall x P(x), P(t), \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, \forall x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図を得るには、（上 $\forall$）の規則を用いる。

• 方針（$\exists$ 右）　$\exists x P(x)$ を結論とする証明図をつくるため、$\neg\exists x P(x)$ を仮定とし $P(t)$ を結論とする証明図をつくる。ただし、t は任意の項であり、$P(t)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を t で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t), \Sigma}$$

ここで、上のシーケントにおける $\exists x P(x)$ が下のシーケントにも残っているが、この理由は方針（$\forall$ 左）の場合と同様である。$\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), P(t), \Sigma$ の証明図から $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(x), \Sigma$ の証明図を得るには、（下 $\exists$）の規則を用いる。

• 方針（$\exists$ 左）　$\exists x P(x)$ を仮定とし式 C を結論とする証明図をつくるため、式 $P(a)$ を仮定とし式 C を結論とするの証明図をつくる。ただし、$P(a)$ は $P(x)$ に現れるすべての x を a で置き換えてできる論理式を表す。

この方針は、次の図式で表現される。

$$\frac{\Gamma, \exists x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, P(a), \Pi \Rightarrow \Delta}$$

ここで、a は Γ, Π, Δ に現れない。$\Gamma, P(a), \Pi \Rightarrow \Delta$ の証明図から $\Gamma, \exists x P(x), \Pi \Rightarrow \Delta, C$ の証明図を得るには、（上 ∃）の規則を用いる。

以上の推論方針によって作成される証明計画図は、G 体系などの呼び名で知られるシーケントによる恒真性判定図と同じものになる。すなわち、WNK の証明図は最も効率的な証明計画図に直結している。WNK の証明図を作成する手順は、次のように述べることができる。

[1] 与えられたシーケントを、推論方針に従って順次分解、変形し、上から下に向かって証明計画図をつくっていく。

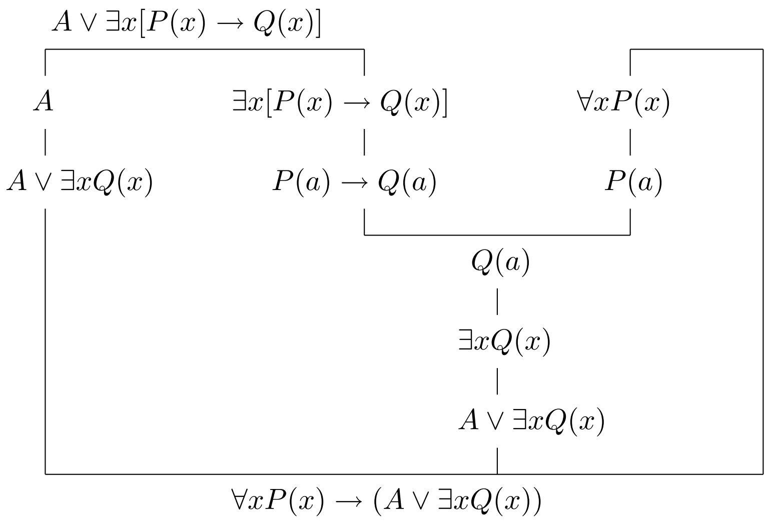
[2] 証明計画図の末端の全てのシーケントが、最終形、すなわち、$\Gamma, C, \Pi \Rightarrow \Delta, C, \Sigma$ の形になるまで、分解、変形を続ける。

[3] 完成した証明計画図の末端のシーケントの証明図（ひとつの式のみからなる証明図）から始め、証明計画図を下から上に向かって辿りながら、方針にしたがって順次証明図を作成していく。

例 4.1　$A \lor \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to (A \lor \exists x Q(x))$ の証明計画図を示す。

$$\cfrac{A \lor \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \to (A \lor \exists x Q(x))}{\cfrac{\forall x P(x), A \lor \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow A \lor \exists x Q(x)}{\cfrac{\forall x P(x), A \lor \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow A, \exists x Q(x)}{\forall x P(x), A \Rightarrow A, \exists x Q(x) \qquad \cfrac{\forall x P(x), \exists x[P(x) \to Q(x)] \Rightarrow A, \exists x Q(x)}{\cfrac{\forall x P(x), P(a) \to Q(a) \Rightarrow A, \exists x Q(x)}{\cfrac{\forall x P(x) \Rightarrow A, \exists x Q(x), P(a)}{\forall x P(x), P(a) \Rightarrow A, \exists x Q(x), P(a)} \qquad \cfrac{\forall x P(x), Q(a) \Rightarrow A, \exists x Q(x)}{\forall x P(x), Q(a) \Rightarrow A, \exists x Q(x), Q(a)}}}}}}$$

この証明計画図を下から上に辿り各方針を実行することにより、例 3.1 で示した次の証明図を得る。



5 おわりに

体系 NK の証明図においては、結論は常に１つである。そのため [1] における NK の証明計画図では、シーケントの最右端の式のみが結論を表していた。ところが、シーケントの右辺のうち推論に関与するのは最右端の結論式のみであるため、証明計画を進める途中で結論の変更が必要となり、そのときに背理法が用いられることになった。WNK の証明計画図では、その結論の変更が必要ないため、背理法の必要もなくなる。その結果、WNK の証明計画図はいわゆる G 体系の証明図と同じ、非常に簡潔なものとなる。しかも、その証明図の実行も直接的に行われるため、その結果得られる証明図は極めて効率的なものといえる。証明図の効率化を目的として得られた体系 WNK の証明が背理法を含まないものであったことは、背理法を用いない証明がはじめに述べたような意味論的な利点を持つのみならず、構文論的にも優れていることを示している。

6 参考文献

[1]　松本和夫：数理論理学，共立，1970

[2]　N.W. テニント：自然演繹の論理学，八千代，1981

[3]　竹内　外史，八杉　満利子：証明論入門，共立，1988

[4]　日本数学会：岩波数学辞典，第 4 版，岩波，2007

[5]　中西泰雄：シーケントを用いた証明計画法，都立産業技術高専研究紀要，第４号，2010